

Rapport du jury

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent une belle utilisation de la complétude, qu'il conviendra d'évoquer. La démonstration de l'un de ces deux théorèmes peut parfaitement faire l'objet d'un des deux développements. On pourra par exemple mettre en pratique, sur des exemples bien choisis, le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles, pour enrichir le plan avec profit. Des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie sont attendues : problèmes d'optimisation sous contraintes (inégalité de Hölder, inégalité d'Hadamard, etc), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc. La méthode des multiplicateurs de Lagrange a bien évidemment toute sa place dans cette leçon, à condition qu'elle soit illustrée par des exemples. L'interprétation de l'énoncé en termes d'espace tangent est visuellement éclairante et permet d'éviter les éventuelles confusions résultant de raisonnements purement matriciels. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Références

- [Petit guide du calcul différentiel - Rouvière](#)
- [Calcul différentiel - El Amrani](#)
- [Calcul différentiel et équations différentielles - S. Benzoni-Gavage](#)

Développements

- [Différentielle du flot](#)
- [Lemme de Morse](#)

Méta-plan

1. Théorèmes de point fixe
2. Théorèmes d'inversion local et des fonctions implicites

1. Théorème des fonctions implicites
2. Théorème d'inversion locale
3. Sous variétés de $\mathbb{R}^n$
 1. Définitions équivalentes
 2. Espaces tangents
 3. Théorème des extrema liés

Plan détaillé

I - Théorèmes de points fixes [El Amrani]

1. Théorème (Picard) : soit A une partie fermée d'un espace de Banach et $f : A \rightarrow A$ une application k -contractante. Alors f admet un unique point fixe dans A . De plus, toute suite d'itérée de f converge à vitesse géométrique vers ce point fixe.
2. Remarque : soit $f : V \rightarrow V$ une application de classe C^1 où V est une partie convexe d'un espace de Banach. Alors, si $\|df(x)\| < k < 1$ pour tout $x \in V$, f est k -contractante.
3. Contre-exemples : toutes les hypothèses sont essentielles !
 1. L'application $x \mapsto x/2$ définie de $\mathbb{R}^*$ dans lui-même est contractante mais n'a pas de point-fixe.
 2. $x \mapsto x^2 - x + 2$ est définie de $\mathbb{R}$ dans lui-même, mais n'est pas contractante, et n'a pas de point fixe.
 3. $x \mapsto \log(x)$ définie sur $[1/2, 3/4]$ est contractante en envoi un complet sur un AUTRE complet, mais n'a pas de point fixe.
4. Corollaire : point-fixe itéré
5. Application : théorème de Cauchy-Lipschitz global
6. Théorème (point-fixe à paramètre) : soit A une partie fermée d'un espace de Banach et Λ une partie d'un espace vectoriel normé. Soit $\Phi : A \times \Lambda \rightarrow A$ une application. On suppose que \$
 1. $\exists k < 1 : \forall \lambda \in \Lambda, \Phi(-, \lambda)$ est k -contractante
 2. $\forall x \in A, \Phi(x, -)$ est continue
 Alors pour tout λ , $\Phi(-, \lambda)$ admet un unique point fixe x_λ dans A et $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

II - Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

J'ai choisi de démontrer le TIL à partir du TFI plutôt que l'inverse, comme c'est fait dans le livre d'El Amrani

1 - Théorème des fonctions implicites [El Amrani] + [Benzoni]

1. Théorème (TFI)
2. Remarque : si la variable y est réelle, l'inversibilité de la différentielle partielle revient à tester si la dérivée partielle est non nulle. Si la variable y est dans un espace de dimension finie, on peut calculer le jacobien de $d_y f(x_0, y_0)$.
3. Exemple : on considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. On a une fonction implicite au voisinage de $(0, 1)$ et $(0, -1)$ mais pas au voisinage de $(1, 0)$ où la différentielle partielle en y n'est pas inversible.
4. Exemple : $f : (x, y) \mapsto x - y^3$. Alors cette fonction admet une fonction implicite en y donnée par $x \mapsto \sqrt[3]{x}$. Pour autant, $d_y f(0, 0)$ n'est pas inversible. Cela dit, la fonction implicite n'est alors pas C^1 .
5. Lemme (résolvante) : si $t \mapsto A(t)$ est une application continue à valeurs dans $M_d(\mathbb{R})$, l'équation différentielle matricielle

$$\begin{cases} X(t)' = A(t)X(t) \\ X(s) = I_d \end{cases}$$

admet une unique solution, notée $R(-, s)$. On l'appelle résolvante du système linéaire $y' = Ay$.

6. Proposition (propriétés de la résolvante) : R est une application continue en tant que fonction de deux variables. De plus :

$$\partial_t R(t, s) = A(t)R(t, s) \quad \partial_s R(t, s) = -R(s, t)A(t)$$

7. Théorème (formule de Duhamel) : l'unique solution du système linéaire $y' = A(t)y + b(t)$, $y(0) = y_0$ est donnée par

$$y : t \mapsto R(t, 0)y_0 + \int_0^t R(t, s) \cdot b(s)ds$$

8. Lemme (DVT 1): soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1 . On note $E := (C^0([0, T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. Alors l'application :

$$G : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto \left(t \mapsto \int_0^t f(x(s)) ds \right)$$

est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par

$$dG(x) \cdot h = \left(t \mapsto \int_0^t df(x(s)) \cdot h(s) ds \right)$$

9. Théorème (DVT 1): soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une champ de vecteur de classe C^1 . Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$ et $T > 0$ tel que la solution du problème de Cauchy $y' = f(y)$, $y(0) = \alpha$ est définie au moins sur $[0, T]$, il existe V un voisinage ouvert de α tel que pour tout $x_0 \in V$, la solution issue de x_0 est définie au moins sur $[0, T]$.
10. Remarque : de la preuve du théorème, on obtient une application $V \rightarrow E$ qui à x_0 associe la solution issue de x_0 restreinte à $[0, T]$. Cette application est C^1 et on sait calculer sa différentielle.
11. Exemple : dans l'équa diff $y' = y^2$, on a encore mieux : le temps d'existence est continu en la condition initiale.

2 - Théorème d'inversion locale [El Amrani]

1. Définition : C^k -difféomorphisme
2. Exemples : l'application $t \mapsto e^{it}$ réalise un C^∞ -difféomorphisme de $]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{U} \setminus \{1\}$, mais pas de $[0, 2\pi[$ dans $\mathbb{U}$.
3. Théorème : inversion locale
4. Exemples : changement de variable polaire
5. Application 1 : si A_0 est une matrice réelle symétrique et inversible, il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\phi : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un C^1 -difféomorphisme sur son image telle que $\forall A \in V$, $A = \phi(A)^T A_0 \phi(A)$. En d'autres termes, les formes quadratiques réelles proches de A_0 sont congruentes à A_0 , et le changement de base peut se faire de manière différentiable. (DVT 2)
6. Corollaire : lemme de Morse (DVT 2)
7. Application 2 : il existe un voisinage de 0 dans $M_d(\mathbb{R})$ est une application $M \mapsto \log(I_d + M)$ de ce voisinage dans $M_d(\mathbb{R})$ tel que

$$\exp \circ \log(I_d + M) = I_d + M.$$

8. Corollaire : $GL_d(\mathbb{R})$ ne contient pas de sous-groupe non-trivial arbitrairement petit (au sens du diamètre)
9. Théorème (inversion globale)
10. Contre-exemple : si on ne suppose pas que f est injective, on a un contre-exemple avec $\theta \mapsto e^{i\theta}$: le cercle et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes, donc encore moins difféomorphes !

III - Un peu de géométrie différentielle [El Amrani calcul diff]

1 - Sous-variété de $\mathbb{R}^n$

1. Définition (sous-variété) : une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d et de classe C^k si pour tout $x \in M$, il existe U_x un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U_x \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k telle que $df(x)$ est surjective et $M \cap U_x = f^{-1}(0)$.
2. Remarque : il s'agit d'une certaine manière d'une généralisation de la définition par équation d'un espace affine de dimension d : F est affine de dimension d ssi il existe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ affine et surjective telle que F est l'ensemble de ses zéros.
3. Théorème : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 1. M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et de classe C^k .
 2. Pour tout $x \in M$, il existe des voisinages ouverts U de x et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'un C^k difféomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ tels que $\phi(M \cap U) = V \cap \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$.
 3. Pour tout $x_0 \in M$, il existe un isomorphisme linéaire $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ au-travers duquel on écrit $x_0 = (x_1, x_2)$, des voisinages ouverts U_1 et U_2 de x_1 et x_2 et une fonction $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ de classe C^k telle que $M \cap U = (x, \phi(x))$.
 4. Pour tout $x \in M$, il existe U_x un voisinage de x et V_x un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ainsi qu'une fonction $\phi : V_x \rightarrow U_x$ de classe C^k telle que f induise un homéomorphisme de V_x sur $M \cap U_x$ et $df(f^{-1}(x))$ est injective.
4. Exemples :
 1. la sphère unité est variété de dimension $n - 1$ et de classe C^∞ .

2. $SL_d(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_d(\mathbb{R})$ de classe C^∞ et de dimension $n^2 - 1$.
3. L'union des droites des abscisses et des ordonnées n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.
5. Définition (vecteur tangent)
6. Remarque : attention, l'espace tangent n'est pas *géométriquement tangent* : il s'agit de la direction de l'espace affine tangent.
7. Théorème : si M est une sous-variété de dimension d , alors $T_a M$ est un espace vectoriel de dimension d . De plus, Si $\Phi : U_a \rightarrow \mathbb{R}^d \times \{0\}$ est un redressement local en a , alors $T_a M = (d\Phi(a))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Si f fournit une définition locale en a par équation, alors $T_a M = \text{Ker}(df(a))$.
8. Remarque : ainsi, si f définit une équation locale de M en a et f admet pour coordonnées $(f_1, \dots, f_{n-d})$, on a alors $T_a M = \text{Vect}(\nabla f_1(a) \dots \nabla f_{n-d}(a))^\perp$.
9. Exemples : L'espace tangent au point $(1, 0 \dots 0)$ de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. L'espace tangent à un sous-espace affine est la direction de cet espace.

3 - Théorème des extrema liés

1. Théorème : soit M une sous-variété de dimension d , $a \in M$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que $f|_M$ admette un extremum local en a . Si g définit une équation locale de M en a , il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ appelés "multiplicateurs de Lagrange" tels que

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n-d} \lambda_i \nabla g_i$$

2. Exemple : On considère M l'intersection de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ avec le plan vectoriel d'équation $y = z$. L'application $f : (x, y, z) \mapsto x + z$ admet un unique minimum global et un unique maximum global sur M , donnés par $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2\sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{6})$.