

Rapport du jury

L'idée de base de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Sur ce point, une aisance raisonnable est attendue des candidats. Un cas particulier important est la caractérisation des fonctions holomorphes parmi les fonctions différentiables, et son interprétation géométrique. Les candidats semblent en général peu familiers avec les propriétés élémentaires des fonctions harmoniques, qui fournissent pourtant un riche champ d'applications. Les candidats solides pourront s'intéresser à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local. Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.

Références

- [Calcul différentiel - El Amrani](#)
- [Petit guide du calcul différentiel - Rouvière](#)
- [Calcul différentiel - Gonord-Tosel](#)
- [Contre-exemples en mathématiques - Hauchecorne](#)
- [Calcul différentiel et équations différentielles - S. Benzoni-Gavage](#)

Développements

- [Différentielle du flot](#)
- [Sous-groupes petits de \$GL\(E\)\$](#)

Méta-plan

1. Différentielle
 1. Notion de différentielle
 2. Opérations sur les différentielles
2. Comportement des applications différentiables

1. Inégalité des accroissements finis
2. Différentielles d'ordre supérieur. Formules de Taylor
3. Optimisation
3. Théorème d'inversion local
 1. Théorèmes de point fixe
 2. Inversion locale, fonctions implicites

Plan détaillé

J'ai choisi, autant que possible, de rester dans un cadre abstrait qui étend le calcul différentiel aux espaces de dimension infinie, au moins lorsque ceux-ci sont complets. La plupart du temps, cela ne complexifie pas les preuves (sauf qu'on n'a pas le droit aux dérivées partielles). Cela dit, le jury l'écrit explicitement : **il ne faut pas faire ça, sauf si on a des applications à la clef**. En l'occurrence, le développement sur la différentielle du flot utilise le théorème des fonctions implicites en dimension infinie, ce qui justifie ce choix.

I - Différentielle

Dans cette partie, E et F désignent deux evn sur $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E .

1 - Notion de différentielle [El Amrani]

1. Définition (différentielle) : une application $f : E \rightarrow F$ est dite différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire **continue** $L_a : E \rightarrow F$ telle que :

$$\forall h \in \dots, f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|_E)$$

On appelle L_a la différentielle de f en a , et on la note $df(a)$. On dit que f est de classe C^1 si l'application $df : a \mapsto df(a) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est continue sur U .

2. Exemples :

1. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow F$, f est dérivable en a si, et seulement si, elle est différentiable en a . Dans ce cas, $df(a) \cdot h = f'(a)h$.
2. Une application $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, avec U un ouvert de $\mathbb{C}$, est holomorphe sur U si, et seulement si, elle est différentiable en tant que fonction de deux variables réelles et si sa différentielle est $\mathbb{C}$ -linéaire.
3. Si E est une algèbre de Banach, l'application $i : GL(E) \rightarrow GL(E)$ qui à T associe T^{-1} est différentiable et $di(T) \cdot H = T^{-1} \circ H \circ T^{-1}$.

3. Définition (différentielle partielle, dérivée partielle) : soit $f : E \times F \rightarrow G$. On appelle différentielles partielles en un point (x_0, y_0) de f les applications $d_1 f(x_0, y_0) : E \rightarrow G$ et $d_2 f(x_0, y_0) : F \rightarrow G$ lorsqu'elles existent. Dans le cas particulier où E est de dimension 1, on définit de manière analogue les dérivées partielles, qu'on note $\partial_1 f(x_0, y_0)$.
4. Proposition : Soit $f : E \times F \rightarrow G$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. f est de classe C^1
 2. f admet ses deux différentielles partielles en tout point, et celles-ci sont continues.
- Dans ce cas, $df(x) \cdot (h, k) = d_1 f(x) \cdot h + d_2 f(x) \cdot k$.
5. Exemples / contre-exemples [Hauchecorne] :
1. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 \sin(y) + 3y$ est de classe C^1 , et sa différentielle en (x, y) est donnée par $(h, k) \mapsto 2hx \sin(y) + 3k + kx^2 \cos(y)$.
 2. La fonction $(x, y) \mapsto xy \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ est différentiable en $(0, 0)$ mais ses dérivées partielles ne sont pas continues en 0.
 3. La fonction $(x, y) \mapsto 1_{0 < y < x^2}$ admet des dérivées partielles dans toutes les directions mais n'est même pas continue en 0.
6. Application (Résolvante, [Benzoni]): soit $A : I \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ une application continue. Pour tout $s \in I$, on appelle résolvante l'application $R(-, s) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ l'unique solution du problème de Cauchy $X'(t) = A(t) \times X(t)$, $X(0) = I_d$. Alors $R(t, \tau)R(\tau, s) = R(t, s)$ pour tout t, s, τ et R est de classe C^1 sur I^2 . Ses dérivées partielles sont données par :

$$\partial_t R(t, s) = A(t)R(t, s) \quad \partial_s R(t, s) = -R(t, s)A(s)$$

7. Proposition / définition (gradient) : si E est un espace de Hilbert, il existe un unique vecteur $\nabla f(x)$ tel que $df(x) = \langle \nabla f(x), - \rangle$. On l'appelle le gradient de f .
8. Exemple : en dimension finie, $\nabla f(x) = (\partial_i f(x))_i$ + exemple explicite.

2 - Opérations sur les différentielles [El Amrani]

On fixe U un ouvert d'un evn E et $D(U)$ l'ensemble des application différentiables de U dans F .

1. Proposition : l'application $f \mapsto df$ est linéaire sur $D(U)$.
2. Théorème (dérivation composée) : soit $f : U \rightarrow F$ une application différentiable et g une application différentiable sur un voisinage de $f(U)$ à valeurs dans G .

L'application $g \circ f$ est différentiable sur U et sa différentielle est donnée par

$$d[g \circ f](x) = [dg(f(x))] \circ [df(x)]$$

3. Exemple : soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace vectoriel de dimension finie. Le quotient de Rayleigh $R_u : x \mapsto \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$ est différentiable et sa différentielle est donnée par...
4. Corollaire (intégration le long d'un arc) : soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc C^1 et soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable sur un voisinage de l'image de γ . On a :

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

5. Application (DVT 2 partie 1): soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1 . Pour $T > 0$, la fonctionnelle $G : C^0([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $x \mapsto (t \mapsto \int_0^t f(x(s)) ds)$ est différentiable, et sa différentielle est donnée par

$$dG(x) \cdot h = (t \mapsto \int_0^t df(x(s)) \cdot h(s) ds)$$

II - Comportement des applications différentiables

1 - Inégalité des accroissements finis [El Amrani, Rouvière]

1. Théorème (inégalité des accroissements finis) : soit $f : U \rightarrow E$ une application différentiable. Soient $(x, y) \in U^2$ tels que $[x; y] \subset U$. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\|df(\lambda x + (1 - \lambda)y)\| \leq k$. Alors $\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|$.
2. Contre-exemple : On considère $L : U \rightarrow \mathbb{C}$ la branche principale du logarithme holomorphe, avec U l'ensemble des nombres complexes de module strictement plus grand que 1 privé des réels négatifs. Alors la différentielle de L est de norme au plus 1 sur U , mais $|L(e^{2+i(\pi-\epsilon)}) - L(e^{2+i(\pi+\epsilon)})| = 2(\pi - \epsilon)$.
3. Application : le nombre de Liouville est transcendant sur $\mathbb{Q}$.
4. Corollaire : soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$. Une application $f : U \rightarrow F$ est constante si, et seulement si, elle est différentiable et de différentielle nulle.
5. Application (intégrale première, [Benzoni]) : Si f est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et H une fonction de $\mathbb{R}^d$ telle que $dH(x) \cdot f(x) = 0$ pour tout x , alors si y est solution

de $y' = f(y)$, $H(y)$ est une fonction constante.

6. Théorème (différentiation d'une limite) : soit U un ouvert connexe de E et $f_n : U \rightarrow F$ une suite de fonctions différentiables. On suppose qu'il existe f une application telle que f_n converge simplement vers f et une application g telle que df_n converge uniformément vers g . Alors f est différentiable et sa différentielle est g .
7. Exemple : l'exponentielle matricielle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ tout entier. Sa différentielle en l'identité est l'application identité de $M_n(\mathbb{R})$. (DVT 1 partie 1)

2 - Différentielles d'ordre supérieur. Formules de Taylor [El Amrani, Rouvière]

1. Définition (différentielle d'ordre supérieure) : on définit $d^n f$ par récurrence en posant $d^{n+1} f$ la différentielle de l'application $d^n f$, lorsqu'elle existe.
2. Remarque : $d^n f(x)$ s'assimile à une application n -linéaire via l'isométrie $L_c(E, L_c(E, F)) \cong L_c^2(E, E; F)$.
3. Exemples :
 1. si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable, sa différentielle seconde s'assimile dans la base canonique à $h \mapsto h^T H_f(x) h$ avec $H_f(x)$ la matrice hessienne de f au point x .
 2. L'inversion est deux fois différentiable sur une algèbre de Banach.
4. Théorème (Schwarz) :
 1. si f est deux fois différentiable en a , sa différentielle seconde est bilinéaire symétrique. En dimension finie, on appelle matrice hessienne de f au point a la matrice de cette forme bilinéaire symétrique dans une base fixée.
 2. Pour U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, si f admet les dérivées partielles $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ et $\partial_{1,2}^2 f$ sur U avec $\partial_{1,2}^2$ continue en $(x_0, y_0) \in U$, alors f admet une dérivée partielle $\partial_{2,1}^2$ en (x_0, y_0) et ces deux dérivées secondes coïncident.
5. Contre-exemple : $(x, y) \mapsto xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ prolongée en 0 par 0.
6. Théorème (Taylor reste intégral)
7. Remarque : on généralise de même les autres formules au cas des fonctions de plusieurs variables.
8. Application (lemme de Morse)

Attention, c'est anachronique ! Ça utilise le théorème d'inversion locale qu'on présentera plus loin (le signaler lors de la défense du plan).

3 - Optimisation et calcul différentiel

1. Proposition : si f admet un extremum x^* sur U , c'est un point critique de f c'est-à-dire que $df(x^*) = 0$.
2. Application : théorème spectral
3. Théorème : Soit f une application deux fois différentiable en $x^* \in U$.
 1. Si $d^2f(x^*)$ est coercive et positive (resp. négative) et si $df(x^*) = 0$, alors x^* est un minimum (resp. maximum) local strict de f .
 2. Si x^* est un minimum (resp. maximum) local de f , alors $df(x^*) = 0$ et $d^2f(x^*)$ est une forme bilinéaire positive (resp. négative).
4. Remarque : si E est de dimension finie, $d^2f(x^*)$ est coercive positive si elle est définie positive. On peut ainsi utiliser l'algorithme de réduction de Gauss pour déterminer la signature de $d^2f(x^*)$ et en déduire la nature de certains points critiques.
5. Exemple / contre-exemple :
 1. optimisation de $(x, y) \mapsto 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$
 2. $(x, y) \mapsto x^2 + \lambda y^4$ présente un point critique en $(0, 0)$ et la forme quadratique $df^2(0)$ est positive dégénérée. La nature du point 0 dépend en revanche du signe de λ .

III - Inversion locale [El Amrani]

1. Théorème (fonctions implicites) : soient E et F des espaces de Banach et $f : E \times F \rightarrow F$ une application de classe C^1 . On suppose qu'il existe $(x_0, y_0) \in E \times F$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $d_2f(x_0, y_0)$ est inversible. Alors il existe un voisinage U de x_0 et V de y_0 ainsi qu'une application $\phi : U \rightarrow V$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F, (f(x, y) = 0 \wedge (x, y) \in U \times V) \iff (x \in U \wedge y = \phi(x))$$

Par ailleurs, $d\phi(x) = -[d_1f(x, \phi(x))]^{-1} \circ [d_2f(x, \phi(x))]$.

2. Application : soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1 . Pour $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$ et $T > 0$ tel que la solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(y)$ soit définie au moins sur $[0, T]$, il existe V un voisinage de α_0 dans $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout

$\alpha \in V$, la solution issue de α soit définie au moins sur $\mathbb{R}^d$. (DVT 2 partie 2, [Gonord-Tosel])

3. Remarque : de la preuve de ce résultat, on obtient par ailleurs que l'application qui à α associe la solution issue de α restreinte à $[0, T]$ est de classe C^1 .
4. Exemple : solutions de $y' = y^2$.
5. Théorème (inversion locale) : soit $f : U \rightarrow F$ une application de classe C^1 entre espaces de Banach. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $df(a)$ est inversible. Alors il existe V un voisinage de a dans U tel que f induise un C^1 difféomorphisme entre V et $f(V)$.
6. Exemple :
 1. pour A_0 une matrice symétrique réelle inversible, il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\phi : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ induisant un C^1 -difféomorphisme sur son image telle que

$$\forall A \in V, A = \phi(A)^t A_0 \phi(A)$$

2. L'exponentielle de matrice réalise un C^1 difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$
7. Application : il n'existe pas de sous-groupes arbitrairement petits dans $GL_n(\mathbb{R})$ (au sens du diamètre) (DVT 1 partie 2)
8. Corollaire (inversion globale) : soit $f : U \rightarrow F$ une application C^1 injective entre espaces de Banach. Si df est inversible en tout point, f induit un C^1 difféomorphisme sur son image.