

Rapport du jury

La connaissance des différentes formules de Taylor, en une, ou plusieurs variables, de leurs différences et de leurs champs d'applications, allant de la géométrie (par exemple la position d'une courbe ou une surface par rapport à son espace tangent) jusqu'aux probabilités (comme par exemple le théorème central limite), doit constituer le coeur de la leçon. Les énoncés devront être illustrés par des exemples pertinents. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Cette analyse impose une bonne compréhension des relations de comparaison (notamment o et O). Le jury s'attend à ce que le lien entre l'existence d'un développement limité à un ordre n et l'existence d'une dérivée n -ième soit connu. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives. Pour les candidates et candidats solides, on peut mentionner des applications comme le lemme de Morse, l'étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema. On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n -ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique.

Références

- [Elements d'analyse réelle - J-E. Rombaldi](#)
- [Calcul différentiel - El Amrani](#)
- [Analyse - X. Gourdon](#)
- [Petit guide du calcul différentiel - Rouvière](#) (DVT [Lemme de Morse](#))
- [Analyse pour l'agrégation - C. Zuily et H. Queffélec](#) (TCL)
- [P. Caldero - Carnet de voyage en Analystan](#) (DVT [Quadrature de Gauss-Legendre](#))
- [J.-Y. Ouvrard - Probabilités 2](#)
- [Analyse numérique - Demailly](#)
- [Analyse complexe - Queffélec-Queffélec](#)

Développements

- [Quadrature de Gauss-Legendre](#)
- [Lemme de Morse](#)

Méta-plan

1. Développements limités et théorème de Taylor-Young
 1. Développements limités
 2. Expression en probabilités
2. (In)égalité de Taylor-Lagrange
 1. Formule de Taylor-Lagrange
 2. Quelques applications
3. Formule de Taylor avec reste intégral
 1. Formule de Taylor avec reste intégrale
 2. Quelques cas d'utilisation
4. Séries de Taylor

Plan détaillé

I - Développements limités et théorème de Taylor-Young

1 - Développements limités [Rombaldi, Hauchecorne]

1. Définition : développement limité
2. Proposition : unicité du développement limité
3. Proposition : opérations arithmétiques sur les DL
4. Exemples : DL de la tangente. DL d'une fonction un peu moche
5. Proposition : f est dérivable en a ssi elle admet un développement limité d'ordre 1 en a .
6. Théorème : Taylor-Young. Si f est n fois dérivable en a , elle admet un DL d'ordre n en a et les coefs sont donnés par les coefs de Taylor de f .
7. Contre-exemple : Un truc avec un DL arbitraire mais seulement C^1 . Par exemple $x^{p+1} \sin\left(\frac{1}{x^p}\right)$.
8. Théorème : Taylor-Young en dimension n

9. Application : calcul de limites. Par exemple :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$$

2 - DL en probabilités [Ouvrard]

1. Définition : fonction caractéristique d'une VA
2. Théorème : si X est une VA de classe L^k , alors ϕ_X est k -fois dérivable en 0 et on a :

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$$

Réciproquement, si ϕ_X est k -fois dérivable en 0, alors X est de classe $L^{2\lfloor k/2 \rfloor}$ et ses moments sont donnés par la même formule.

3. Contre-exemple (peigne de Dirac). On pose, pour $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = 0$ si $|n| \leq 1$ et $a_n = \frac{c}{n^2 \log |n|}$ où c est une constante de sorte à avoir $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = 1$. On pose alors $\mathbb{P} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_n$ et X une VA de loi $\mathbb{P}$. Alors X n'est pas intégrable, mais ϕ_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. Corollaire : si X est un variable aléatoire de classe L^p , alors on a la développement limité en 0 :

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor p \rfloor} i^k \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k + o(t^k)$$

5. Application (théorème central limite)

II - (In)égalité de Taylor-Lagrange

1 - Formules de Taylor-Lagrange [El Amrani]

1. Théorème : égalité de Taylor-Lagrange
2. Remarque : à l'ordre 0, c'est le TAF
3. Corollaire : inégalité de Taylor-Lagrange
4. Théorème (inégalité de Taylor-Lagrange en dimension d) : Soit f une application de classe C^n sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$. Pour $a, b \in U$ tels que $[a; b] \subset U$, et tels que

f est $n + 1$ fois différentiable sur $[a; b]$, on a :

$$\|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} d^k f(a) \cdot (b - a, \dots, b - a)\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{\theta \in [0,1]} d^{n+1} f(a + \theta(b-a)) \cdot (\dots)$$

5. Contre-exemples : Il est primordial que le segment $[a, b]$ appartienne à U ! On peut considérer le logarithme holomorphe pour un contre-exemple. L'égalité de Taylor-Lagrange est fautive à partir de la dimension 2

2 - Application au calcul approché d'intégrales [Demailly, Analystan]

1. Définition (méthode de quadrature) : Une méthode de quadrature est une façon d'approcher l'opérateur d'intégration sur $[a, b]$ en considérant des points c_i de $[a, b]$ et des poids ω_i pour écrire :

$$\int_a^b f(t) dt \approx \mathcal{Q}(f) := \sum_{i=1}^p \omega_i f(c_i)$$

2. Exemple (méthode des rectangles) : cela consiste à prendre $c_i = a + \frac{i-1}{p}b$ et $\omega_i = 1$.
3. Définition : polynômes de Legendre
4. Lemme : Le n -ième polynôme de Legendre est de degré n à coefficient dominant strictement positif et admet exactement n racines distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.
5. Définition (quadrature de Gauss-Legendre) : On prend $a = -1$, $b = 1$, c_i la i -ème racine du p -ième polynôme de Legendre et ω_i l'intégrale d'un bon polynôme d'interpolation.
6. Théorème : la quadrature de Gauss-Legendre est exacte sur les polynômes de degré au plus $2n - 1$. De plus, si f est une fonction de classe C^{2n} , on a :

$$|\mathcal{Q}(f) - \mathcal{I}(f)| \leq \|f^{2n}\|_{\infty} \frac{4}{(2n+1)!}$$

7. Exemple bienvenue

III - Formule de Taylor reste intégrale

1 - Le reste intégral de Laplace [El Amrani]

1. Théorème (Taylor reste intégral)
2. Remarque : on a la formulation équivalente avec l'intégrale entre 0 et 1
3. Application : Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant 0. On suppose que $f(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. Alors l'application $\frac{f(x)}{x^n}$ se prolonge par continuité en 0.
4. Théorème (Taylor reste intégrale, dimension d)
5. Application : pour f de classe C^1 , l'application $x \mapsto (t \mapsto \int_0^t f(x(s))ds)$ est différentiable sur C^0 .

2 - Utilisation en géométrie différentielle [Rouvière]

1. Lemme : Soit A_0 une matrice symétrique inversible. Il existe U un voisinage de A_0 dans $S_d(\mathbb{R})$, V un voisinage de I_d dans $GL_d(\mathbb{R})$ et $\phi : U \rightarrow V$ un C^1 difféomorphisme tel que

$$\forall A \in U, A = \phi(A)A_0^t\phi(A)$$

2. Corollaire (lemme de Morse) : soit f une application de classe C^3 définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$. On suppose $f(0) = f'(0) = 0$ et $d^2f(0)$ s'identifie à une forme quadratique non dégénérée de signature (p, q) . Il existe u un changement de coordonnées (C^1 difféo local) envoyant 0 sur 0 tel que

$$f(x) = u_1(x) + \dots + u_p(x) - u_{p+1}(x) - \dots - u_{p+q}(x)$$

IV - Séries de Taylor [Queffélec-Queffélec]

Lorsque f est de classe C^∞ , une idée naturelle est de pousser son développement de Taylor "à l'ordre infini", mais ça n'est pas si simple que ça !

1. Définition : fonction développable en série entière. Fonction analytique.
2. Proposition : une fonction DSE est C^∞ et les coefs sont donnés par la série de Taylor.
3. Exemples : L'exponentielle et le cosinus sont DSE au voisinage de n'importe quel point. La fonction $x \mapsto e^{1/x^2}$ est C^∞ et sa série de Taylor a un rayon de CV infini, mais n'est pas DSE.
4. Lemme (Borel) : si (a_n) est une suite de nombres réels, il existe une fonction f C^∞ définie sur un voisinage de 0 telle que (a_n) est la suite des dérivées de f .

5. Théorème : f est DSE au voisinage d'un point a ssi il existe une fonction $\bar{f}$ holomorphe définie sur un voisinage de a dans $\mathbb{C}$ telle que $\bar{f}|_{\mathbb{R}} = f$