

Examen d'algèbre - Septembre 2024

Durée : 1h30 - Documents et calculatrice interdits

Vous ferez attention à la rédaction.

Si, exceptionnellement, vous pensez constater une erreur dans l'énoncé, vous le précisez dans votre copie et continuez en corrigeant l'éventuelle erreur.

Exercice 1

Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel et on notera $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire entre u et v , $\|u\|$ la norme de u associée au produit scalaire.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-3, 1, 5)$.

- Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille (u, v) . Justifier la réponse.
- Déterminer le nombre réel λ tel que le vecteur $v' = u + \lambda.v$ soit orthogonal à u .
- Pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^3$, on définit le vecteur w' par :

$$w' = w - \frac{\langle w, u \rangle}{\|u\|^2} \cdot u - \frac{\langle w, v' \rangle}{\|v'\|^2} \cdot v'$$

- Montrer que pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^3$, on a $w' \in E^\perp$.
 - Dans la suite de l'exercice, on suppose $w = (-2, 3, 2)$.
Montrer que w n'est pas dans E ni dans $E^\perp$.
 - Déterminer le vecteur w' associé à w .
 - Que peut-on dire de la famille de vecteurs (u, v', w') ? Justifier.
- Soit p la projection orthogonale sur E .
 - Déterminer la matrice A de l'endomorphisme p dans la base (u, v', w') .
 - En déduire la matrice B de l'endomorphisme p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - On considère la matrice C appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Justifier que C est diagonalisable.
- Démontrer que le sous-espace vectoriel E est le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 3. Vous montrerez d'abord que 3 est valeur propre.
- Que peut-on dire de la base (u, v', w') pour l'endomorphisme s ? Justifier.
- En déduire une expression de la forme $s = \alpha.p + \beta.Id_{\mathbb{R}^3}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $Id_{\mathbb{R}^3}$ désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit A la matrice représentative d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et x un nombre réel.

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x+2 & x-2 & 2 \\ x-2 & x+2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer deux valeurs x_1 et x_2 de x pour lesquelles la matrice A est une matrice de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel que l'on précisera dans les deux cas.