

Examen d'algèbre - Octobre 2025

Durée : 1h30 - Documents et calculatrice interdits

Vous ferez attention à la rédaction.

Si, exceptionnellement, vous pensez constater une erreur dans l'énoncé, vous le précisez dans votre copie et continuez en corrigeant l'éventuelle erreur.

Exercice 1

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et u un vecteur unitaire de E (vecteur dont la norme est égale à 1). On note $\langle, \rangle$ son produit scalaire.

On considère l'application $f_{a,b}$ où a et b sont deux réels avec $a \neq 0$ définie par :

$$\forall x \in E, f_{a,b}(x) = a. \langle x, u \rangle .u + b.x$$

où le $.$ correspond à une multiplication.

1. Montrer que $f_{a,b}$ est un endomorphisme symétrique de E .
2. Calculer $f_{a,b}(u)$ et $f_{a,b}(x)$ pour tout $x \in \text{Vect}(u)^\perp$. En déduire le spectre de $f_{a,b}$.
3. $f_{a,b}$ est-il diagonalisable ? Justifier.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de a et de b , l'endomorphisme $f_{a,b}$ est-il projecteur ? Justifier.
5. Lorsque $f_{a,b}$ est bijectif, déterminer la réciproque de $f_{a,b}$.

Aide : si vous posez $y = f_{a,b}(x)$, vous pourrez calculer à un moment donné $\langle y, u \rangle$.

6. On considère maintenant l'application F définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(E)$ par $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, F((a, b)) = f_{a,b}$.
 - (a) Montrer que F est une application linéaire.
 - (b) Déterminer $\text{Ker}(F)$.
 - (c) Déterminer le rang de F .

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère F le sous-espace vectoriel défini par :

$$F = \{ {}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0 \}$$

On veut ici déterminer la matrice de la base canonique $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p sur F par deux méthodes.

Première méthode

1. Déterminer une base orthonormale de F .
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F .

Deuxième méthode

1. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$.
3. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur F .