

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

– U.E. « compléments d'algèbre » –

1 Algèbre linéaire

Exercice 1. (Idéaux de matrices) Soit d un entier naturel non nul. Un *idéal*⁽ⁱ⁾ de $\mathbb{M}_d(\mathbb{K})$ est un ensemble $\mathcal{I} \subset \mathbb{M}_d(\mathbb{K})$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

- $0 \in \mathcal{I}$
- $\mathcal{I}$ est stable par somme. En d'autres termes :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{I}^2, \quad A + B \in \mathcal{I} \quad (1)$$

- $\mathcal{I}$ est « absorbant », c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{I}, \forall M \in \mathbb{M}_d(\mathbb{K}), \quad A \cdot M \in \mathcal{I} \text{ et } M \cdot A \in \mathcal{I} \quad (2)$$

1. Montrer que $\{0\}$ et $\mathbb{M}_d(\mathbb{K})$ sont des idéaux de $\mathbb{M}_d(\mathbb{K})$.
2. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{M}_d(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{I}$ non nulle. Montrer qu'il existe un entier $1 \leq r \leq d$ tel que la matrice J_r appartienne à $\mathcal{I}$, où J_r est définie par :

$$J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, d-r} \\ 0_{d-r, r} & 0_{d-r, d-r} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Indication : on pourra penser à utiliser le rang de A .

3. En déduire que $I_d \in \mathcal{I}$.
4. Conclure : $\mathcal{I} = \mathbb{M}_d(\mathbb{K})$.

(i). En toute rigueur, la notion d'idéal est relative à un anneau **commutatif**. L'anneau des matrices ne l'étant pas, on devrait parler d'idéaux à droite, à gauche et bilatère. On s'intéresse ici uniquement aux idéaux bilatères.

Exercice 2. (Diagonalisation en pratique) Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle *matrice compagnon* du polynôme P la matrice carrée $n \times n$ donnée par :

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de C_P est P .
2. Dans toute la suite, on considère l'équation différentielle :

$$y'''(t) - 3y''(t) - 33y'(t) + 35 = 0 \quad (E)$$

On vectorise cette équation en posant l'inconnue vectorielle :

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Montrer que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait l'équation (E) si, et seulement si, $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfait :

$$Y'(t) = C_P \cdot Y(t) \quad (EV)$$

où $P = X^3 - 3X^2 - 33X + 35$.

3. Calculer toutes les solutions de l'équation (E). On admet que les solutions de l'équation (EV) sont données par les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \exp(tC_P) \cdot \Lambda, \quad \Lambda \in \mathbb{R}^3 \quad (6)$$

Indication : on pourra chercher à réduire la matrice C_P .

Exercice 3. (Lemme des noyaux) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension d finie et u un endomorphisme $\mathbb{K}$ -linéaire de E . On considère $P_1, \dots, P_n$ une famille de n polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ qu'on suppose deux à deux premiers entre eux.

1. On pose, pour $1 \leq i \leq n$, le polynôme :

$$D_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j \quad (7)$$

Montrer que les (D_i) sont premiers entre eux dans leur ensemble ⁽ⁱⁱ⁾.

Indication : on pourra observer que si Q divise D_1 , il divise l'un des P_i pour $i > n$.

2. Montrer :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Ker}(P_i(u)) = \text{Im}(D_i(u)) \quad (8)$$

3. On note P le produit des (P_i) . Dédurre de la question précédente le lemme des noyaux :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(P_i(u)) \quad (9)$$

4. Application : montrer qu'un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

Le lemme des noyaux est un résultat fondamental du cours de réduction, et la traduction concrète d'un fait profond de théorie abstraite des anneaux. Il sert à démontrer un grand nombre de résultats usuels sur les matrices et intervient également dans des résultats plus avancés. Il est par exemple à la base d'un [algorithme de factorisation de polynômes à coefficients dans des corps finis](#).

(ii). Des polynômes sont dits premiers entre eux dans leur ensemble si tout polynôme qui divise chacun de ces polynômes est constant.

2 Formes quadratiques, produits scalaires

Exercice 4. (Réduction simultanée) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension d et $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Lorsque $\mathcal{B}$ est une base de E , on note $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire si, et seulement si, pour toute base $\mathcal{B}$ de E , $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique définie positive⁽ⁱⁱⁱ⁾.
2. On suppose dans cette question que φ est un produit scalaire sur E . Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E et $\mathcal{C}$ une base orthonormée pour le produit scalaire φ . On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$. Calculer la matrice suivante :

$$P^T \cdot Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P \quad (10)$$

3. Soient $A, B \in S_d(\mathbb{R})$. On suppose que B est définie positive. Montrer qu'il existe P une matrice inversible telle que :

(a) $P^T \cdot B \cdot P = I_d$

(b) $P^T \cdot A \cdot P$ est diagonale de mêmes valeurs propres que A .

Indication : on pourra utiliser le théorème spectral dans un espace euclidien bien choisi.

Ce résultat est connu sous le nom de lemme de réduction simultanée. Bien qu'il puisse paraître anodin, il a des applications très concrètes, notamment en géométrie. On peut par exemple l'utiliser pour affirmer qu'une ellipse du plan a deux axes principaux orthogonaux, et que la longueur des deux demi-axes caractérise l'ellipse à isométrie près.

(iii). Une matrice symétrique A est dite définie positive si pour tout vecteur colonne non nul X de $\mathbb{R}^d$, le réel $X^T \cdot A \cdot X$ est strictement positif.

Exercice 5. (Polynômes de Legendre) On définit l'application suivante :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}[X])^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (11)$$

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt \quad (12)$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On appelle *polynômes de Legendre* la famille (L_n) obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

2. Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3 .
3. Montrer que le polynôme L_n est de degré n et que son coefficient dominant est strictement positif.

Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On admettra dans la suite que le polynôme L_n possède n racines réelles distinctes $-1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n \leq 1$. On définit la famille de polynômes $(I_1, \dots, I_n)$ obtenue par interpolation de Lagrange de la façon suivante : I_i est de degré $n-1$ et $I_i(\alpha_j)$ vaut 1 si $i = j$, 0 sinon. On introduit les quantités :

$$\omega_i := \int_{-1}^1 I_i(t) dt \quad (13)$$

et on pose pour tout polynôme P :

$$\mathcal{Q}(P) := \sum_{i=1}^n \omega_i P(\alpha_i) \quad (14)$$

4. Soit P un polynôme de degré au plus $n-1$. Montrer :

$$P = \sum_{i=1}^n P(\alpha_i) I_i \quad (15)$$

5. En déduire que si P est de degré au plus $n-1$, alors :

$$\mathcal{Q}(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt \quad (16)$$

6. Montrer que l'égalité précédente reste vraie si on suppose seulement que P est de degré au plus $2n-1$.

Indication : On pourra effectuer la division euclidienne de P par L_n .

L'application $\mathcal{Q}$ est une méthode de quadrature, dite de Gauss-Legendre. Lorsque f est une fonction suffisamment régulière, $\mathcal{Q}(f)$ approche l'intégrale de f sur $[-1, 1]$ de façon assez précise. Cette méthode a été utilisée historiquement pour obtenir à la main des valeurs approchées d'intégrales. Notez qu'il est possible d'obtenir une expression explicite des polynômes de Legendre.

3 Projecteurs

Exercice 6. (Régression linéaire) Soient d un entier naturel non nul. On suppose qu'on dispose d'une série d'observations $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ où chacune des (X_i) est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et chacune des (Y_i) est à valeurs réelles. On cherche à établir un modèle de régression linéaire qui lie les (Y_i) aux (X_i) , c'est-à-dire qu'on souhaite déterminer un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^d$ et un réel β tels que Y_i soit approché raisonnablement bien par $\langle \alpha, X_i \rangle + \beta$. Une idée pour ce faire est de travailler en distance quadratique : on va chercher α et β de sorte à minimiser la quantité :

$$J(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^n |Y_i - \langle \alpha, X_i \rangle - \beta|^2 \quad (17)$$

1. On introduit la matrice $\mathbb{X} \in \mathbb{M}_{n, d+1}(\mathbb{R})$ dont la i -ème ligne est le vecteur X_i auquel on a rajouté un 1 en $n+1$ -ième coordonnée. On pose également $\mathbb{Y} := (Y_1, \dots, Y_n)$ et $\theta \in \mathbb{R}^{d+1}$ le vecteur formé du vecteur α auquel on ajoute le réel β en dernière coordonnée. Montrer l'égalité :

$$J(\alpha, \beta) = \|\mathbb{Y} - \mathbb{X} \cdot \theta\|_2^2 \quad (18)$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

2. En déduire que (α, β) minimise J si, et seulement si, $\mathbb{X} \cdot \theta$ est le projeté orthogonal de $\mathbb{Y}$ sur $\text{Im}(\mathbb{X})$.
3. On suppose désormais que la matrice $\mathbb{X}$ est de rang $d+1$. On rappelle que cette hypothèse implique que la matrice ${}^t\mathbb{X} \cdot \mathbb{X}$ est inversible (on ne demande pas de le démontrer). Montrer que $({}^t\mathbb{X}\mathbb{X})^{-1}{}^t\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}$ est une valeur appropriée pour θ .
4. **Application numérique :** on considère le jeu de données suivant :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	-4,52	-1,70	1,27	3,56	7,23	10,40	13,38	15,50	18,74	21,86	25,12

Trouver les facteurs α et β (tous deux réels ici) qui minimisent $J(\alpha, \beta)$ sur ce jeu de données.

On pourra se servir d'un outil numérique pour limiter la charge de calculs. Un graphique est recommandé ! Les valeurs de α et β devraient être proches de 3 et -5