

MÉTHODOLOGIE EN ALGÈBRE

- synthèse du cours de compléments -

Le but de ce document est de récapituler de la manière la plus synthétique possible les différentes méthodes que vous devez avoir en tête à l'issue de ce cours d'algèbre. Il ne constitue pas un cours en soi mais seulement un plan à suivre pour résoudre un problème une fois que celui-ci a été identifié.

Table des matières

1	Techniques générales	2
1.1	Calculer une base d'un sous-espace vectoriel donné par un système d'équations .	2
2	Réduction d'endomorphismes	2
2.1	Trucs et astuces pour calculer un polynôme caractéristique	2
2.2	Calculer un sous-espace propre	3
2.3	Déterminer si un endomorphisme est diagonalisable	3
2.4	Diagonaliser une matrice avec matrice de passage	3
3	Formes quadratiques	3
3.1	Identifier une forme polaire	3
3.2	Vérifier qu'une forme q est quadratique	4
4	Espaces préhilbertiens, orthogonalité	5
4.1	Vérifier qu'une application est un produit scalaire	5
4.2	Montrer que deux espaces sont orthogonaux	5
4.3	Calculer une base orthonormale	5
4.4	Calculer un projecteur orthogonal sur F	6

1 Techniques générales

1.1 Calculer une base d'un sous-espace vectoriel donné par un système d'équations

Dans $\mathbb{K}^n$, on cherche à déterminer une base du sous-espace vectoriel F défini comme l'ensemble des n -uplets tels que :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1. On utilise le pivot de Gauss pour échelonner le système.
2. On choisit un certain nombre de paramètres parmi les inconnues. Ce nombre est donné par la formule « n - nombre de lignes du système échelonné». Les paramètres doivent être choisis de sorte à ce que le système n'impose pas de relation de dépendance linéaire entre eux ; typiquement, il faut que dans chaque ligne du système échelonné, il reste une inconnue qui ne soit pas un paramètre.
3. On exprime toutes les autres inconnues du système en fonction des paramètres.
4. En donnant des valeurs astucieuses aux paramètres, on extrait une base de solutions du système. Le cardinal d'une telle base doit être égal au nombre de paramètres. Il suffit pour chaque vecteur de base de prendre un paramètre égal à 1, les autres égaux à 0, et cela assure d'avoir une base.

2 Réduction d'endomorphismes

2.1 Trucs et astuces pour calculer un polynôme caractéristique

J'ai rassemblé ici un certain nombre d'astuces simples et rapides à appliquer qui pourront vous aider à calculer un polynôme caractéristique. Notez que ces astuces échouent parfois, mais y penser pourra souvent vous économiser beaucoup de temps.

On se donne $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à calculer le déterminant $\det(XI_n - A)$. Souvenez-vous que le polynôme caractéristique a toujours pour degré la taille de la matrice. Par conséquent, si la matrice est au moins 3×3 , vous ne pouvez pas espérer trouver ses racines à tous les coups s'il vous est donné sous forme développée (en réalité, il y a des formules jusqu'au degré 4, mais pas au-delà). Le but est donc de chercher à factoriser à tout prix le polynôme dès le calcul du déterminant !

- Tester A contre des vecteurs simples pour chercher une potentielle valeur propre évidente. Systématiquement essayer la base canonique et le vecteur composé uniquement de 1.
- Essayer de sommer toutes les lignes ou toutes les colonnes dans le déterminant (exo 1, a).
- Se souvenir des formules suivantes :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda, \quad \det(A) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} \lambda^{(i)} \quad (2)$$

(i). La notation est un peu abusive : les valeurs propres peuvent apparaître plusieurs fois dans la somme et le produit en fonction de leur multiplicité.

- Si toutes les techniques ci-dessus échouent, il ne reste plus qu'à calculer le polynôme caractéristique comme une brute. On obtiendra alors une expression développée dont on cherche des racines évidentes (TOUJOURS tester $0, 1, 2, -1, -2$).
- Enfin souvenez-vous que les exercices qui vous sont donnés sont faisables avec des astuces pour factoriser le polynôme caractéristique, gardez espoir jusqu'au bout !

2.2 Calculer un sous-espace propre

Soit A une matrice carrée et λ une valeur propre de A . On cherche à déterminer E_λ le sous-espace propre associé à λ . Il suffit d'exploiter ceci :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X \in E_\lambda \iff X \in \text{Ker}(\lambda I_n - A) \iff (\lambda I_n - A) \cdot X = 0 \quad (3)$$

On s'est donc ramené au problème consistant à calculer une base d'un sous-espace vectoriel décrit par une équation (cf supra) !

2.3 Déterminer si un endomorphisme est diagonalisable

Soit A une matrice carrée.

1. Calculer son polynôme caractéristique χ_A .
2. Si tout va bien, obtenir une forme factorisée de χ_A , c'est-à-dire :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad (4)$$

Pour vérifier que A est diagonalisable, il suffit de calculer la dimension des espaces propres associés aux valeurs propres telles que $\alpha_i > 1$.

3. Si pour toutes ces valeurs propres, la dimension de l'espace propre associé est α_i , A est diagonalisable ! Sinon, elle ne l'est pas.

2.4 Diagonaliser une matrice avec matrice de passage

Soit A une matrice carrée.

1. Calculer χ_A sous forme factorisée.
2. Pour chaque valeur propre, calculer une base de l'espace propre associé.
3. Concaténer tous les vecteurs de base obtenus en colonne dans une matrice P .
4. $P^{-1}AP$ est diagonale ! Surtout, ne faites pas les calculs, la forme diagonale de A dépend uniquement de l'ordre dans lequel vous avez mis les vecteurs dans P .

3 Formes quadratiques

3.1 Identifier une forme polaire

On dispose de $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique dont on cherche la forme polaire φ . Deux façons de procéder :

- On utilise l'une des **formules de polarisation** :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}$$

- On procède à une identification matricielle lorsque la quadratique q est donnée sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E, q(X) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} f_{i,j} x_i x_j \quad (5)$$

où les (x_i) sont les coordonnées du vecteur X dans une certaine base $\mathcal{B}$.

1. On note $A = (A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de q dans une base qui dans laquelle la quadratique q s'exprime sous la forme (5).
2. D'après la formule matricielle du calcul d'une forme quadratique :

$$q(X) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \quad (6)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \quad \text{car } A \text{ est symétrique} \quad (7)$$

3. On peut alors identifier les coefficients :

$$\begin{cases} f_{i,i} = a_{i,i} \\ f_{i,j} = \frac{1}{2} a_{i,j} \end{cases} \quad (8)$$

4. On peut enfin identifier la forme polaire :

$$\forall X, Y \in E^2, \varphi(X, Y) = {}^t X \text{Mat}_{\mathcal{B}} Y \quad (9)$$

3.2 Vérifier qu'une forme q est quadratique

On dispose de $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ et on souhaite savoir s'il s'agit ou non d'une forme quadratique.

1. Si la forme polaire associée φ n'est pas connue, on propose un candidat en utilisant les formules de polarisation :

$$\varphi : (x, y) \mapsto \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} \quad (10)$$

2. q est quadratique si, et seulement si, φ est bilinéaire et $\varphi(x, x) = q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

Remarque : φ ainsi définie est nécessairement symétrique, que q soit quadratique ou pas.

4 Espaces préhilbertiens, orthogonalité

4.1 Vérifier qu'une application est un produit scalaire

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application dont on souhaite vérifier que c'est un produit scalaire. On procède alors le plus souvent dans cet ordre :

1. Montrer la symétrie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (11)$$

2. Grâce à la symétrie, on peut ne montrer la linéarité que d'un côté pour avoir la bilinéarité :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \quad (12)$$

3. Montrer la positivité : on prend $x \in E$ quelconque et on montre

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad (13)$$

4. Enfin la définition : soit $x \in E$ tel que $\langle x, x \rangle = 0$. On doit alors montrer que $x = 0$. Cette partie est souvent la plus difficile et demande de s'adapter à la situation, il n'y a pas de façon générale de faire.

4.2 Montrer que deux espaces sont orthogonaux

On considère F et H deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

- Généralement, on prend $x \in F$, $y \in H$ et on montre que $\langle x, y \rangle = 0$.
- Si on connaît une base de chacun de ces espaces, resp. $(f_1, \dots, f_k)$ et $(h_1, \dots, h_l)$, il suffit de montrer :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket \times \llbracket 1, l \rrbracket, \langle f_i, h_j \rangle = 0 \quad (14)$$

Notez que ça n'est pas nécessairement plus court que de prendre des vecteurs quelconques (cf exo 6 projections par exemple).

4.3 Calculer une base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E .

- En général, on calcule une base de F puis on applique Gram-Schmidt.
- Dans le cas particulier où F est décrit par un système d'équations et que l'on cherche une base de $F^\perp$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,n}x_n = 0 \end{cases} \quad (15)$$

on peut calculer une base de $F^\perp$ en réinterprétant ces équations comme des produits scalaires. Posons :

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} \quad (16)$$

et

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

On a alors :

$$X \in F \iff \begin{cases} \langle X, v_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle X, v_n \rangle \end{cases} \quad (18)$$

$$\iff X \perp v_1, \dots, X \perp v_k \quad (19)$$

$$\iff X \in \{v_1, \dots, v_k\}^\perp \quad (20)$$

$$\iff X \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)^\perp \quad (21)$$

On en déduit que :

$$F^\perp = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) \quad (22)$$

En particulier, $v_1, \dots, v_k$ forme une famille génératrice de $F^\perp$ dont on peut extraire une base puis appliquer Gram-Schmidt.

4.4 Calculer un projecteur orthogonal sur F

Il y a essentiellement deux méthodes :

1. (a) Calculer une base de F (cf les méthodes au-dessus) $(f_1, \dots, f_k)$.
 (b) Ensuite, au choix :
 - i. On choisit une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E (la base canonique dans le cas de $\mathbb{R}^n$ est souvent adaptée). On pose $A = (f_1 \mid \dots \mid f_k)$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des (f_j) écrits dans la base orthonormée de E . Notez que cette matrice est rectangulaire. La matrice de la projection orthogonale sur F dans la base $\mathcal{B}$ est alors donnée par :

$$A({}^tAA)^{-1}{}^tA \quad (23)$$

- ii. On orthogonalise les (f_j) pour obtenir une BON $(\bar{f}_j)$. La projection orthogonale sur F est donnée par :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\langle \bar{f}_j, x \rangle}{\|\bar{f}_j\|^2} \cdot \bar{f}_j \quad (24)$$

2. On peut également calculer le projecteur sur $F^\perp$. Notons le p . Le projecteur orthogonal sur F est tout simplement $Id - p$.

Dans certains cas, il est pénible d'extraire une base de F et $F^\perp$, mais on arrive autrement à écrire tout vecteur x comme une somme $y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$ (exercice 6 sur les projections). Il est bon d'avoir conscience que dans ce cas, y est la projection orthogonale de x sur F .