DVP Cauchy-Lipschitz & Gronwall

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

— Prof : .

— Leçons : 220.

— Références :

  — Rouvière, *Le petit guide du calcul différentiel* : Bof, Attention,

  — Berthelin.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue, globalement lipschitzienne selon la second coordonnée. Alors, pour tout $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution définie sur I au problème :

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Preuve. On fixe $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. On commence par supposer I compact, et on note L la constante de Lipschitz associée à f sur I.

On note de plus $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ l'espace $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ munit de la norme :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{E}} : \begin{pmatrix} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup\limits_{t \in I} e^{-2L|t-t_0|} \|y(t)\| \end{pmatrix},$$

avec $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

On admet que c'en est une.

On cherche à appliquer le théorème de point fixe de Banach (Picard) à la fonction :

$$\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \\ y & \longmapsto & \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Il faut donc vérifier que $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ est un espace de Banach.

On sait que $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ est complet. De plus, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ sont équivalentes (car I est compact) :

$$e^{-L|I|} \|y(t)\| \leq e^{-L|t-t_0|} \|y(t)\| \leq \|y(t)\|,$$

d'où le résultat en passant au sup. Donc $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ est bien complet.

Il reste à montrer que φ est contractante. Soient donc $(x,y) \in \mathcal{E}$ et $t \in I$, $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(y)(t) - \varphi(x)(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t f(s,y(s))ds - \int_{t_0}^t f(s,x(s))ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f(s,y(s)) - f(s,x(s))\| ds \text{ par inégalité triangulaire,} \\
&\leq \int_{t_0}^t L\|y(s) - x(s)\| ds \text{ par hypothèse sur } f \text{ et } I \text{ compact,} \\
&\leq \int_{t_0}^t Le^{2L(s-t_0)}e^{-2L(s-t_0)}\|y(s) - x(s)\| ds \leq \int_{t_0}^t Le^{2L(s-t_0)}\|y - x\|_{\mathcal{E}} ds \\
&\leq L\|y-x\|_{\mathcal{E}} \left[\frac{e^{2L(s-t_0)}}{2L}\right]_{t_0}^t = \frac{1}{2}\|y-x\|_{\mathcal{E}}\left(e^{2L(t-t_0)} - 1\right) \leq \frac{1}{2}e^{2L(t-t_0)}\|y-x\|_{\mathcal{E}}
\end{aligned}$$

D'où

$$e^{-2L(t-t_0)}\|\varphi(y)(t) - \varphi(x)(t)\| \leq \frac{1}{2}\|y-x\|_{\mathcal{E}}.$$

On peut faire la même chose pour $t \leq t_0$. Ainsi, en passant au sup en $t \in I$, on trouve bien φ contractante (de constante $\frac{1}{2}$).

On peut donc appliquer le théorème de point fixe de Banach (Picard), et il vient l'existence d'un unique point fixe $\tilde{y}$ tel que :

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s,\tilde{y}(s))ds.$$

Ainsi, on a bien

$$\begin{cases} \tilde{y}' = f(t,\tilde{y}), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

unique et définie sur I.

Pour le cas général, on note, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$I_k = I \cap [-k,k].$$

et on a

$$I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Par inclusion successive des I_k compacts, on peut utiliser l'étape précédente et on a accès aux solutions (y_k) telles que, par unicité, $y_{k+1}|_{I_k} = y_k$. Ainsi,

$$\tilde{y} : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & y_k(t) \text{ si } t \in I_k \end{pmatrix}$$

est bien définie sur I et unique, ce qui conclut.

□

Lemme 2 (un lemme de Gronwall)

Dans les mêmes conditions, soit x, y deux solutions de l'équation. Alors, pour tout $t \in I$:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L|t-t_0|}.$$

Preuve. On pose $\psi(t) = \|x(t) - y(t)\|$. Pour $t \geq t_0$, on a

$$\psi(t) \leq \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} L\psi(s)ds,$$

par les calculs précédents sur φ.

ψ n'étant pas dérivable (pourquoi ?), on pose $\phi = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds$ et on a :

$$\phi'(t) \leq \psi(t_0) + L\phi(t).$$

De plus,

$$\frac{d}{dt}\left(\phi(t)e^{-L(t-t_0)}\right) = \left(\phi'(t) - L\phi(t)\right) e^{-L(t-t_0)} \leq \psi(t_0)e^{-L(t-t_0)}.$$

Il vient :

$$\phi(t)e^{-L(t-t_0)} \leq \psi(t_0)\int_{t_0}^{t} e^{-L(s-t_0)}ds = \psi(t_0)\left[\frac{e^{-L(s-t_0)}}{-L}\right]_{t_0}^{t} = \psi(t_0)\frac{\left(1 - e^{-L(t-t_0)}\right)}{L}.$$

D'où :

$$\phi(t) \leq \psi(t_0)\frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L}.$$

Ainsi, il vient :

$$\psi(t) = \phi(t) \leq \psi(t_0) + L\psi(t_0)\frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L} = \psi(t_0)e^{L(t-t_0)}.$$

On peut faire de même pour $t \leq t_0$, d'où le résultat.

□