DVP Convergence des séries de Dirichlet

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 230, 241, 265.
- Références :
  - Zuily-Queffélec,
  - *Les fonctions spéciales vues par les problèmes.*

Notation On appelle série de DIRICHLET la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{a_k}{k^s}$ où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et $s\in\mathbb{C}$. On note de plus :

- $\sigma_c=\inf\left\{x\in\mathbb{R},\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{a_k}{k^x}\text{ est convergente}\right\}=\inf\Lambda_c\in\overline{\mathbb{R}}$ l'abscisse de convergence,
- $\sigma_c=\inf\left\{x\in\mathbb{R},\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{|a_k|}{k^x}\text{ est convergente}\right\}=\inf\Lambda_{ac}\in\overline{\mathbb{R}}$ l'abscisse de convergence absolue,
- $\{s>\alpha\}:=\{s\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(s)>\alpha\}$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$ donné.

Théorème 1 Soit $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{a_k}{k}^s$ une série de DIRICHLET d'abscisse de convergence $\sigma_c<+\infty$. Alors :

1. S'il existe $s_0=x_0+\imath\theta$ tel que $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{a_k}{k^{s_0}}$ converge, alors $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{a_k}{k^s}$ converge uniformément sur tout compact de $\{s>x_0\}$ vers sa somme f,
2. $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{a_k}{k^s}$ converge sur $\{s>\sigma_c\}$, diverge sur $\{s<\sigma_c\}$ et f est holomorphe sur $\{s>\sigma_c\}$,
3. Si $-\infty<\sigma_c$, $\sigma_c\le\sigma_{ac}\le\sigma_c+1$,
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^s}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)$

Preuve.

1. On note, pour $s=x+\imath\theta$ et $p\in\mathbb{N}$, $f_p(s)=\sum_{i=1}^{p}\frac{a_k}{k^s}$, $f_0=0$. Par hypothèse, $(f_p(s_0))_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge, donc $M:=\sup\{|f_p(s_0)|,p\in\mathbb{N}^*\}<+\infty$. On utilise une transformation d'ABEL et un critère de CAUCHY pour montrer la convergence uniforme de f_p vers f. Soit $1\le p<q$ et $s\in\{s>x_0\}$. On a :

$$f_{p-1}(s)-f_q(s)=\sum_{k=p}^{q}\frac{a_k}{k^{s_0}}\cdot\frac{1}{k^{s-s_0}}=\sum_{k=p}^{q}\left(f_{k+1}(s_0)-f_k(s_0)\right)\cdot\frac{1}{k^{s-s_0}}$$
$$=\frac{f_{q+1}(s_0)}{q^{s-s_0}}-\frac{f_p(s_0)}{p^{s-s_0}}+\sum_{k=p}^{q-1}f_{k+1}(s_0)\left(\frac{1}{(k+1)^{s-s_0}}-\frac{1}{k^{s-s_0}}\right)$$

Donc, pour $s-s_0=a+\imath b$, $a\in\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$|f_{p-1}(s)-f_q(s)|\le\frac{M}{q^{x-x_0}}-\frac{M}{p^{x-x_0}}+M\sum_{k=p}^{q-1}\left|\frac{1}{(k+1)^{s-s_0}}-\frac{1}{k^{s-s_0}}\right|$$

Comme $\frac{1}{(k+1)^{s-s_0}}-\frac{1}{k^{s-s_0}}=\int_n^{n+1}\frac{s-s_0}{t^{s-s_0+1}}dt$, il vient :

$$|f_{p-1}(s)-f_q(s)|\le\frac{2M}{(p+1)^{x-x_0}}+M|s-s_0|\sum_{k=p}^{q-1}\frac{1}{k^{x-x_0+1}}$$

Pour K un compact de $\{s > x_0\}$, (*En faisant un dessin*) il existe $R, \delta > 0$ tels que $K \subset \{s, |s - s_0| \leq R, x > x_0 + \delta\}$, et il vient bien :

$$\|f_{p-1} - f_q\|_{\infty,K} \leq \frac{2M}{(p+1)^\delta} + MR\sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{k^{\delta+1}} \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Soit $s \in \{s > \sigma_c\}$. Par définition de l'inf, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{k^{x_0}}$ soit convergente et que $\sigma_c < x_0 < \mathrm{Re}(s)$. Le premier point permet de conclure sur la convergence de $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{k^s}$.

   Par l'absurde, supposons qu'il existe $s_0 = x_0 + \imath\theta \in \{s < \sigma_c\}$ tel que la série de DIRICHLET associé converge. Toujours grâce au premier point, pour tout $s \in \{s > x_0\}$, la série de DIRICHLET associée converge. Par définition de l'inf, on a donc $\sigma_c \leq x_0 < \sigma_c$, ce qui est absurde.

   Comme on a prouvé la convergence uniforme sur tous compacts de $\{s > \sigma_c\}$ et que les fonction $s \longmapsto k^{-s}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, on a bien : f est holomorphe sur $\{s > \sigma_c\}$.

3. La convergence absolue entraînant la convergence, on a $\Lambda_{ac} \subseteq \Lambda_c$, donc, par décroissance de l'inf, $\sigma_c \leq \sigma_{ac}$.

   Par l'absurde, supposons $\sigma_c + 1 < \sigma_{ac}$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ assez petit, il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que

$$\sigma_c + 1 + \varepsilon < x < \sigma_{ac}$$

   Alors $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{k^{x-1-\varepsilon}}$ converge, donc il existe $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_k}{k^x}\right| = \left|\frac{a_k}{k^{x-\varepsilon-1}}\right| k^{-\varepsilon-1} \leq Ck^{-\varepsilon-1}$$

   qui est le terme général d'une suite convergente. Donc $x \geq \sigma_{ac}$, ce qui est absurde.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on cherche à prouver

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k^s} = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right) \text{ i.e. } n^x \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k^s}\right| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \left(\frac{n}{k}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Comme chaque terme de la somme converge vers 0 quand $x \to +\infty$, il suffit de prouver la convergence uniforme en x. Par définition de σ_{ac} (fini par 3.), il existe $\rho > \sigma_{ac}$ tel que

$\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{|a_k|}{k^\rho}$ converge, ce qui entraîne la convergence uniforme sur les réels $x \geq \rho$ car

$$|a_k| \left(\frac{n}{k}\right)^x \leq n^\rho \frac{|a_k|}{k^\rho}$$

pour k assez grand, avec le second membre indépendant de x et terme général d'une série convergente.

□