DVP Critère de nilpotence de Cartan

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 153, 157, 159.
- Références :
  - *Objectif agrégation*, Exercice 4.16.

Théorème 1 Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ et

$$T = \{t \in \mathrm{GL}(E), [t, \mathcal{A}] \subset \mathcal{B}\}$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie étendu. Si $t \in T$ vérifie $\mathrm{tr}(tu) = 0$ pour tout $u \in T$, alors t est nilpotent.

Preuve. Le corps $\mathbb{K}$ étant supposé algébriquement clos, χ_t est scindé, et donc t admet une décomposition de Dunford $t = s+n$ avec s diagonalisable, n nilpotent et $[s, n] = 0$. Montrons que $s = 0$. Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les valeurs propres de t, qui sont donc aussi celle de s. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base dans laquelle s est diagonale et n triangulaire supérieure (par exemple une base dans laquelle t a une forme de Jordan). Montrons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s(e_i) \underbrace{=}_{\text{vrai}} \lambda_i e_i = 0$.

Comme $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, on peut identifier, $\mathbb{Q}$ à un sous-corps de $\mathbb{K}$ (à son sous-corps premier, i.e. son sous-corps engendré par $1_{\mathbb{K}}$). On peut donc considérer F le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les λ_i, et le voir comme sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ de dimension inférieure ou égale à n. Il suffit donc de montrer que F est réduit au point 0. Pour cela, par propriété de la dualité (comme E est de dimension finie, on peut le voir comme conséquence de l'existence de la base duale), **il suffit de montrer que** $F^* = \mathcal{F}(F, \mathbb{Q}) = \{0\}$.

Soit $\varphi \in F^*$, montrons que $\varphi = 0$. **On définit :**

$$u : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ E & \longmapsto & \varphi(\lambda_i)e_i \end{pmatrix}$$

Supposons dans un premier temps que $u \in T$. Comme t et u sont triangulaires dans E, tu l'est aussi, et on a :

$$0 = \mathrm{tr}(tu) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)\lambda_i$$

Par $\mathbb{Q}$-linéarité de φ, il vient :

$$\varphi(\mathrm{tr}(tu)) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi(\lambda_i)^2}_{\in\mathbb{Q}} = 0$$

Donc $\varphi(\lambda_i) = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Donc φ est nulle sur une famille génératrice de F donc nulle sur F. Ainsi, $F^* = \{0\}$ donc $F = \{0\}$, ce qui prouve le résultat.

Il reste à montrer que $u \in T$, c'est à dire que $\mathrm{ad}_u(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, où :

$$\mathrm{ad}_u : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & [u, M] \end{pmatrix}.$$

Lemme 2 Soit $u = s + n$ la décomposition de DUNFORD de $u \in \mathcal{L}(E)$ pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(\lambda_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$ ses valeurs propres distinctes, $(n_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$ leur multiplicités et $(N_i = \ker(u - \lambda_i id)^{n_i})_{i\in[\![1,l]\!]}$ les sous-espaces caractéristiques associés. Alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = s$ et $P(0) = 0$.

Preuve. Les $(X - \lambda_i)^{n_i}$ étant premiers entre eux deux à deux, le théorème chinois fournit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, l]\!]$,

$$P(X) \equiv \lambda_i \pmod{(X - \lambda_i)^{n_i}}$$

(en effet, on peut définir un P_i qui vérifie chaque équation, donc un P qui les vérifie toutes).

Soit $x \in E$, par le lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{i=1}^{l} N_i$, donc on peut décomposer de manière unique $x = \sum_{i=1}^{l} \underbrace{x_i}_{\in N_i}$. On a alors $s(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_i$. Par définition de P, pour tout $i \in [\![1, l]\!]$, il existe $R_i \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(u) = \lambda_i id + R_i(u) \circ (u - \lambda_i id)^{n_i}$ donc $P(u)(x_i) = \lambda_i x_i$ et il vient bien $P(u) = s$.

Il reste à voir que $P(0) = 0$.

— Si $0 \in \mathrm{Spec}(u)$, c'est gagne car alors $P \equiv 0 \pmod{X^{n_0}}$ donc $P(0) = 0$,

— Sinon, on applique le lemme chinois aux $(X - \lambda_i)^{n_i}$ et à X, ce qui ne change rien à ce qui précède et permet d'avoir $P(0) = 0$.

□

On peut montrer que la décomposition de DUNFORD de ad_t est $\mathrm{ad}_s + \mathrm{ad}_n$. Il existe donc, par le lemme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\mathrm{ad}_t) = ad_s$ et que $P(0) = 0$. de plus, en notant $E_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} e_j$ une base de $\mathcal{L}(E)$, on a :

$$\mathrm{ad}_u(E_{i,j}) = (\varphi(\lambda_i) - \varphi(\lambda_j))E_{i,j} = (\varphi(\lambda_i - \lambda_j))E_{i,j}.$$

Par interpolation de LAGRANGE des valeurs $\varphi(\lambda)$ pour $\lambda \in \left\{\lambda_i - \lambda_j, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\right\}$, on a accès à $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $Q(\lambda_i - \lambda_j) = \varphi(\lambda_i - \lambda_j)$ En particulier, $Q(0) = 0$ et $Q(\mathrm{ad}_s) = \mathrm{ad}_u$.

Avec $R = Q \circ P$, on a $R(0) = 0$ et $R(\mathrm{ad}_t) = \mathrm{ad}_u$. Comme $t \in T$, on a $\mathrm{ad}_t(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, donc

$$(\mathrm{ad}_t)^2(\mathcal{A}) \subset \mathrm{ad}_t(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$$

Par récurrence, il vient $(\mathrm{ad}_t)^k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc en particulier, $\mathrm{ad}_u(\mathcal{A}) = Q(\mathrm{ad}_t)(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, ce qui achève la preuve.

□

Remarque

- Avec $Q = X - P$ dans le lemme, on a la même conclusion avec n au lieu de s.
- Pour la décomposition de Dunford du crochet de Lie, on passe par plusieurs étapes :
  - $[\mathrm{ad}_A, \mathrm{ad}_B] = \mathrm{ad}_{[A,B]}$,
  - $\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}_A) = \{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathrm{Spec}(A)\}$:
    - L'**inclusion réciproque** se fait grâce aux vecteurs propres $u^t v$, où u est un vecteur propre de A et v un vecteur propre de ${}^tA$,
    - L'inclusion directe se fait en remarquant que pour α valeur propre et M vecteur propre associé pour ad_A, on a $AM = M(\alpha Id + A)$, puis $A^k M = M(\alpha Id + A)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, donc pour tous polynômes, en particulier pour le polynôme minimal de A. Comme M est non nul, $\pi_A(\alpha Id + A) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc, par décomposition en facteurs de degré 1 de π_A, il existe $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que $\alpha Id - \lambda Id + A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, i.e. $\lambda - \alpha \in \mathrm{Spec}(A)$.
  - En particulier, si A est nilpotente, ad_A l'est aussi, (réciproque fausse, pour ad_A nilpotente, il faut et suffit que $A = \lambda Id + N$, N nilpotente)
  - ad_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable :
    - On reprend la famille de vecteurs propres déjà exprimée. Il suffit de montrer que cette famille est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour conclure le **sens réciproque**. Par cardinalité, il suffit de montrer que la famille est génératrice, donc de montrer que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres $\mathcal{F}$ contient une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En écrivant les e_i dans les bases u_i et v_i, on en déduit que les $E_{i,j}$ sont dans $\mathcal{F}$, ce qui achève la preuve de ce sens,
    - (*inutile ici*) Pour $(M_i)_{i \in [\![1,n^2]\!]}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de vecteurs propres de ad_A et pour x un vecteur propre de A, on peut vérifier que $(M_i x)_{i \in [\![1,n^2]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ (par théorème de la base incomplète) et de vecteurs propres de A (penser à la def de ad_A) donc on peut en extraire une base...
  - Le résultat s'obtient alors aisément.