

Décidabilité de l'arithmétique de PRESBURGER

Antoine DEQUAY

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Nathalie BERTRAND & Nicolas MARKEY.
- Leçon : 909, 914, 924.
- Références :
 - Carton, p.178.

Définition 1 *Arithmétique de PRESBURGER.* Théorie du premier ordre des entiers munis de l'addition.

C'est le langage engendré par $\{0, 1, +, =\}$, correspondant à la théorie du premier ordre des entiers munis de l'addition mais pas de la multiplication.

Définition 2 *Décidabilité.* Une théorie T est dite décidable si le problème "une formule φ est conséquence logique de T " est décidable.

Théorème 3 L'arithmétique de PRESBURGER est décidable.

Preuve. On va montrer que le problème

1 PRES :
 2 Entrée : Une formule φ close pour la signature $\sigma = \{0, 1, +, =\}$,
 3 Sortie : True si $\mathbb{N} \models \varphi$, non sinon.

est décidable. Pour cela, on va construire un automate $\mathcal{A}$ tel que : $\mathbb{N} \models \varphi \iff L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

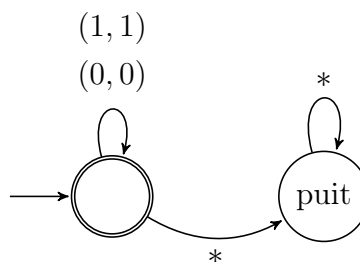
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, commençons par nous donner un alphabet pour représenter les k -uplets $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$. On pose $\Sigma_k = \{0, 1\}^k$ et on représente les entiers en binaire avec le bit de poids faible à gauche. On ajoute des 0 à droite pour avoir des représentations de la même taille, ce qui permet bien de représenter le k -uplet grâce à un mot sur Σ_k .

Soit φ une formule sur la signature σ .

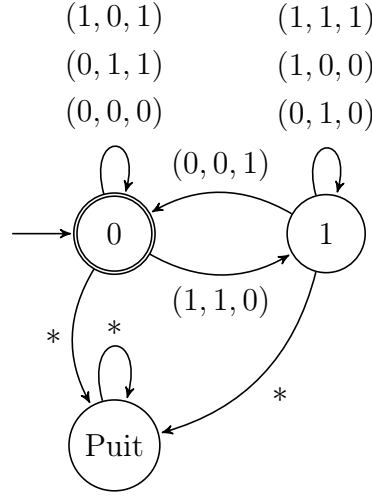
Sans que la sémantique ne soit changée, on remplace les sous-formule de φ de la forme $\forall x \psi(x)$ par $\neg \exists x \neg \psi(x)$.

Construisons par induction structurelle sur φ l'automate voulu. Soit ψ une sous-formule de φ :

- Si ψ est une formule atomique :
 - Si ψ est de la forme $x = y$, on pose $\mathcal{A}_\psi$:



— Si ψ est de la forme $x + y = z$, on pose $\mathcal{A}_\psi$:



— Si x, y et/ou z ne sont pas des variables mais des constantes, un travail sur la sémantique ou sur les automates déjà construits permet de traiter tous les cas.

- Si ψ est de la forme $\psi_1 \wedge \psi_2$, on construit pour $\mathcal{A}_\psi$ l'automate de l'union de $\mathcal{A}_{\psi_1}$ et $\mathcal{A}_{\psi_2}$,
- Si ψ est de la forme $\psi_1 \vee \psi_2$, on construit pour $\mathcal{A}_\psi$ l'automate de l'intersection de $\mathcal{A}_{\psi_1}$ et $\mathcal{A}_{\psi_2}$,
- Si ψ est de la forme $\neg\psi_1$, on construit pour $\mathcal{A}_\psi$ l'automate du complémentaire (attention au coût de la déterminisation dans ce cas),
- Si ψ est de la forme $\exists x\psi_1(x)$, avec x une variable non-libre, on prend $\mathcal{A}_\psi = \mathcal{A}_{\psi_1}$,
- Si ψ est de la forme $\exists x\psi_1(x)$, avec x une variable libre et $\mathcal{A}_{\psi_1} = (Q, \delta, I, F)$ on pose $\mathcal{A}_\psi = (Q, \delta', I, F)$, avec δ' tel que :

$$p \xrightarrow{(x_1, \dots, x_{k-1})} q \text{ dans } \mathcal{A}_\psi \iff \exists x \text{ tel que } p \xrightarrow{(x_1, \dots, x_{k-1}, x)} q \text{ dans } \mathcal{A}_{\psi_1}$$

□

Via cette induction structurelle on obtient un automate sur le langage vide qui vérifie bien la propriété énoncée en début de preuve.

Le problème du langage non-vide étant décidable (car cela revient à utiliser un algorithme d'accessibilité, par exemple via un parcours en largeur du graphe représentant l'automate), La théorie de PRESBURGER est bien décidable.

Théorème 4 L'algorithme ici présenté est dans EXPTIME.

Preuve. L'opération la plus coûteuse dans l'algorithme est la déterminisation d'un automate dans le cas de la négation. Comme une déterminisation fait passer d'un automate à k états à un automate à 2^k états, si φ contient u symboles $\neg$ et v symboles $\forall$, on doit appliquer un algorithme de déterminisation $u + 2v$ fois lors de la construction de l'automate final. Cela a donc un coût de $2 \uparrow\uparrow (u + 2v)$, i.e. l'algorithme est dans $(u + 2v)\text{EXPTIME}$.

□

Remarque

- Le problème est en fait dans 3-EXPTIME.
- L'arithmétique de PRESBURGER est complète et cohérente.