DVP Décomposition polaire $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 156, 158, 214, 220, 221.
- Références :
  - Gonnord, Tosel, *Calcul différentiel*,
  - *H2G2*, *Tome 1*.

En plus du résultat habituel d'homéomorphie, on se propose de démontrer le caractère $\mathcal{C}^\infty$-difféormorphe de la décomposition polaire.

Théorème 1 L'application

$$\psi : \begin{pmatrix} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{pmatrix}$$

est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Preuve. **Montrons que ψ est bijective**. Pour la surjectivité, soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On peut vérifier que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$${}^tMM = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$$

avec les $\lambda_i > 0$. On peut donc définir

$$S = P\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

On a $S^2 = {}^tMM$, et avec $O = MS^{-1}$, on a (car S est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) :

$${}^tOO = {}^t\left(MS^{-1}\right)MS^{-1} = {}^tS^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$

Donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $M = OS$, ce qui prouve la surjectivité.

Montrons que ψ est injective : soit donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, (O,S) et (O',S') dans la pré-image de M par ψ. On a :

$$S^2 = {}^tMO^tOM = {}^t\left(O'S'\right)O'S' = S'^2$$

Soit Q le polynôme interpolateur de Lagrange tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (attention aux doublons), on a :

$$\begin{aligned} S &= P\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1} = PQ\left(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\right)P^{-1} \\ &= Q\left(P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}\right) = Q\left(S^2\right) = Q\left(S'^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi, S' commutant avec ses puissances itérées, elle commute avec S. Donc les matrices sont simultanément diagonalisables.

Ainsi, comme $S'^2 = S^2$, leurs valeurs propres au carré sont égales. Comme les deux matrices sont dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, leurs valeurs propres sont donc égales, donc on a $S = S'$, et il vient $O = O'$, donc ψ est bien bijective.

Il reste à prouver le caractère $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe.

Lemme 2 L'application

$$\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ S & \longmapsto & S^2 \end{pmatrix}$$

est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Preuve. La caractère $\mathcal{C}^\infty$ de φ est évident (polynomial en les coefficients).

Pour la bijectivité, on a vu tous les éléments précédemment (*Commenter sur le tableau et remplacer* ${}^tMM$ *par* $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Il reste à montrer, pour pouvoir utiliser le théorème d'inversion locale, que $d\varphi(x) : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est injective pour $x \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a $d\varphi(x)(h) = xh + hx$, donc $h \in \ker d\varphi(x)$ revient à $xh + hx = 0$. Ainsi, pour $\lambda \in \operatorname{Spec}(x)$ et u un vecteur propre associé, on a $xh(u) = -hx(u) = -\lambda h(u)$ donc $-\lambda$ est valeur propre de x et alors $\lambda = 0$ ou $h(u) = 0$. Comme $x \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\lambda \neq 0$, donc h est nulle sur tous les espaces propres de x. Comme x est diagonalisable, $h = 0$, d'où l'injectivité, puis le caractère $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe.

□

Par ce qui précède, on a :

$$\psi^{-1} : \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \left(M\sqrt{{}^tMM}^{-1}, \sqrt{{}^tMM} \right) \end{pmatrix}$$

Par le lemme, et en se rappelant que $\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & u^{-1} \end{pmatrix}$ est $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale en les coefficients de la matrice, par son expression via la comatrice, ψ^{-1} est bien $\mathcal{C}^\infty$, ce qui achève la preuve.

□

Remarque On peut prouver que $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme, donc

$$\theta : \begin{pmatrix} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & Oe^S \end{pmatrix}$$

l'est également (d'où la dénomination avec l'analogie avec les complexes).

Remarque On a des résultats similaires dans $\mathbb{C}$ en remplaçant ^{t} par * (donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ devient $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$).