Ellipsoïde de JOHN LOEWNER

Antoine DEQUAY

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Zied AMMARI.
- Leçon : 229, 152.
- Références :
 - Lucas ISENMANN.

Théorème 1 Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0, contenant K , de volume minimal.

Preuve. On associe à un ellipsoïde quelconque sa forme quadratique associée et sa matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ associée : $\mathcal{E}_S = \{x \in \mathbb{R}^n, q_S(x) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n, {}^t x S x \leq 1\}$.

Calculons le volume de $\mathcal{E}_S$ un ellipsoïde quelconque.

Par le théorème spectral, on a :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), S = {}^t P \text{Diag}(a_1, \dots, a_n) P$$

Alors, si $z = {}^t P x$, on a $q_S(z) = q_S({}^t P x) = {}^t x P S {}^t P x = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$.

Le changement de variable $z = {}^t P x$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, de jacobienne $|\det(P)| = 1$. On a donc :

$$\text{Vol}(\mathcal{E}_S) = \int_{q_S(z) \leq 1} dz = \int \dots \int_{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2} dx_1 \dots dx_n$$

Les changements de variables $t_i = \sqrt{a_i} x_i$ permettent d'avoir :

$$\text{Vol}(\mathcal{E}_S) = \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} \int \dots \int_{\sum_{i=1}^n t_i^2} dt_1 \dots dt_n := \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} \text{Vol}(\overline{B_{\|\cdot\|_2}(0, 1)})$$

Ainsi, $\text{Vol}(\mathcal{E}_S)$ est proportionnel à $\mu(s) := \det(S)^{-\frac{1}{2}}$.

On va donc, pour prouver le résultat, chercher à minimiser μ sur un ensemble bien choisi.

Lemme 2 La fonction μ est strictement convexe sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve. Montrons que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

Soit $(R, S) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$. Par le théorème de pseudo-réduction simultanée, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\Delta_R = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$ et $\Delta_S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n) \in D_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $R = {}^t P \Delta_R P$ et $S = {}^t P \Delta_S P$. Pour $t \in]0, 1[$, on a $t \Delta_R + (1-t) \Delta_S \in D_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $t R + (1-t) S = {}^t P t \Delta_R + (1-t) \Delta_S P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Vérifions maintenant l'inégalité de convexité, en ayant en tête que $\ln$ est concave, donc

$\ln(tu + (1-t)v) \geq t\ln(u) + (1-t)\ln(v)$, donc $u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$:

$$\begin{aligned}
\mu(tR + (1-t)S) &= \mu({}^t P t \Delta_R + (1-t) \Delta_S P) \\
&= |\det(P)|^{-1} \prod_{i=1}^n (tr_i + (1-t)s_i)^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq |\det(P)|^{-1} \prod_{i=1}^n (r_i^t s_i^{1-t})^{-\frac{1}{2}} \\
&= |\det(P)|^{-1} \left(\prod_{i=1}^n r_i^{-\frac{1}{2}} \right)^t \left(\prod_{i=1}^n s_i^{-\frac{1}{2}} \right)^{1-t} \\
&\leq |\det(P)|^{-1} \left(t \left(\prod_{i=1}^n r_i^{-\frac{1}{2}} \right) + (1-t) \left(\prod_{i=1}^n s_i^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= t\mu(R) + (1-t)\mu(S)
\end{aligned}$$

Par stricte concavité de $\ln$, il y a égalité si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $r_i = s_i$, i.e. $R = S$, d'où le résultat. $\square$

Comme K est borné, soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $K \subseteq \overline{B_{\|\cdot\|_2}(0, R)} = \mathcal{E}_{\frac{1}{R^2}I_n} = \mathcal{E}_{S_+}$. On définit alors l'ensemble :

$$C = \{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \mu(S) \leq \mu(S_+), K \subseteq \mathcal{E}_S\}$$

Lemme 3 L'ensemble C est convexe, compact (fermé borné car on se trouve en dimension finie) et non-vidé.

Preuve.

- **Non-vidé** : $S_+ \in C$ donc C est non vide.
- **Fermé** : On utilise la caractérisation séquentielle d'un fermé ; soit $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C qui converge dans $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t x S_k x \geq 0$, il en est de même pour S , qui est donc positive. Par continuité du déterminant, on a $\mu(S_k) \rightarrow \mu(S)$, donc $\mu(S) \leq \mu(S_+)$. Donc $\det(S) \geq \det(S_+) > 0$, donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Enfin, $\forall x \in K, \forall k \in \mathbb{N}$, ${}^t x S_k x \leq 1$, donc il en est de même pour S , donc $K \subseteq \mathcal{E}_S$, d'où $S \in C$.
- **Borné** : Comme K est d'intérieur non vide, il existe $b \in K$ et $\epsilon > 0$ tels que $B(b, \epsilon) \subseteq K$. On considère la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour $S \in C$ et $\|x\| \leq \epsilon$, on a $b+x \in K$, donc $q_S(b+x) \leq 1$. Ainsi, comme $\sqrt{q_S}$ est une norme, elle satisfait l'inégalité triangulaire, donc :

$$\sqrt{q_S(x)} = \sqrt{q_S(x+b-b)} \leq \sqrt{q_S(x+b)} + \sqrt{q_S(b)} \leq 1 + 1$$

donc $q_S(x) \leq 4$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ une valeur propre de S et x un vecteur propre associé de norme δ . Alors $q_S(x) = {}^t x S x = \lambda \|x\|^2 \leq 4$. Donc $\lambda \leq \frac{4}{\delta^2}$, donc $\rho(S) \leq \frac{4}{\delta^2}$. Comme $\|S\| \leq \rho(S)$, on en déduit que C est bien borné.

— **Convexe** : Soit $R, S \in C$, $t \in [0, 1]$ et $T = tR + (1 - t)S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ par convexité de S_n^{++} . Par convexité de μ , on a : $\mu(T) \leq \mu(S_+)$. Pour $x \in K$, on a $q_R(x) \leq 1$ et $q_S(x) \leq 1$, donc $q_T(x) \leq 1$, donc $T \in C$. □

Ainsi, μ est continue sur C compact non vide, donc atteint ses bornes. Par stricte convexité de μ , le minimum est atteint en un unique S , ce qui prouve le résultat annoncé. □

Exercice 4 Pour les questions possible, voir les approfondissements de la référence, et penser à regarder la preuve de la pseudo-diagonalisation simultanée.