Espace des formes modulaires

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 151, 236, 239.
- Références :
  - Le Barbenchon.
- Pour les réponses aux questions et aller plus loin :
  - Serre, *Cours d'Arithmétique*.

Notation On note $\mathcal{H}$ le demi-plan de POINCARRÉ.

Définition 1 *Forme modulaire.* Une forme modulaire f de poids $k \in \mathbb{N}$ sur $\mathcal{H}$ est une fonction vérifiant :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),\ f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \tag{1}$$

qui soit holomorphe sur $\mathcal{H}$ et "en l'infini".

Remarque Ici, avec $c = 0$ et $a = b = d = 1$, on montre que f est en particulier 1-périodique. On peut donc trouver g telle que $f = g(\exp(2\imath\pi\cdot))$. Comme le changement de variable $z \longmapsto \exp(2\imath\pi z)$ envoie $\mathcal{H}$ sur $D(0,1)\backslash\{0\}$, on dira que f est holomorphe à l'infini si g admet un prolongement holomorphe en 0. La notion de valeur, zéro et multiplicité de f en l'infini sont de même transposées à g en 0.

L'équation (1) implique en particulier que f est entièrement déterminée par son image sur $\mathcal{D} := \left\{z \in \mathcal{H}, |z| > 1, Re(z) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$. Dans la suite, on verra donc f comme une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}$.

Définition 2 M_k. Pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle M_k l'espace vectoriel des formes modulaires de poids k.

Théorème 3 (Rappel, théorème d'intégration sur les petits arcs)

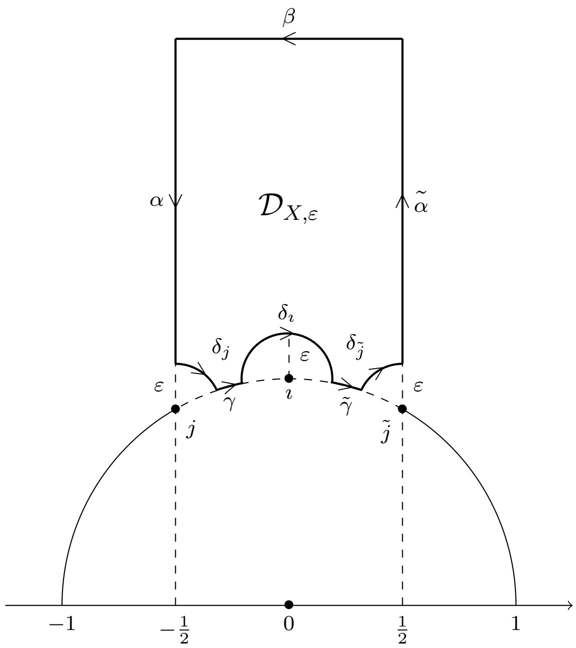
Soient $p \in \mathbb{C}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varepsilon > 0$. Soit un arc ℓ d'écart angulaire θ du cercle $\partial D(p, \varepsilon)$ et f un fonction holomorphe définie au voisinage de ℓ. Alors on a :

$$\frac{1}{2\imath\pi}\int_\ell \frac{f'}{f} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\theta}{2\pi} v_p(f)$$

Théorème 4 $\dim(M_0) = \dim(M_4) = 1$ et $\forall k \in [\![1,3]\!], \dim(M_k) = 0$.

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in M_k\backslash\{0\}$ et g la fonction qui lui est associée dans la remarque. On suppose de plus que f n'a pas de zéros sur le bord des $\mathcal{D}_{X,\varepsilon}$ définis ci-après, pour tout $X, \varepsilon > 0$.

A dire pendant le dessin : On se donne le domaine $\mathcal{D}_{X,\varepsilon}$, où $X, \varepsilon > 0$, β est porté par $\{z \in \mathbb{C}, Im(z) = X\}$, et les δ_x sont des arcs de cercle autour de $x \in \left\{j, i, -j^2 = \tilde{j}\right\}$ de rayon ε.



Lemme 5 Pour X assez grand et ε assez petit, les zéros de f sont dans dans $\mathcal{D}_{X,\varepsilon}$ et sont en nombre fini.

Preuve. f est une fonction holomorphe non-nulle, donc, par le principe des zéros isolés, ses zéros sur $\mathcal{D}$ sont isolés. Ainsi, il existe ε tel que f n'ai pas de zéros dans $D(j,\varepsilon)$, $D(\imath,\varepsilon)$ et $D(\tilde{j},\varepsilon)$, sauf éventuellement en leur centre (non compris dans $\mathcal{D}$).

De même, g est holomorphe et non-nulle, donc ses zéros sont isolés. En particulier, il existe $\eta \in]0,1[$ tel que g n'ai pas de zéro dans $D(0,\eta)$ sauf éventuellement en 0 (non compris dans $\mathcal{D}$). Ainsi, f n'a pas de zéros z tel que $\left|e^{2\imath\pi z}\right| = e^{-2\pi Im(z)} \leq \eta$, c'est à dire tel que $Im(z) \geq \dfrac{-ln(\eta)}{2\pi} =: X$.

Il reste à voir que les zéros de f sont en nombre fini. C'est bien le cas, car les zéros de f forment un ensemble discret, fermé par le principe des zéros isolés, sur $\mathcal{D}_{X,\varepsilon}$ compact de $\mathcal{D}$. (Prendre l'ensemble des boules séparant les zéros, ont peut en extraire un recouvrement fini de cet ensemble, d'où le résultat...)

□

Lemme 6 On a la formule des ordres :

$$\frac{1}{2}v_\imath(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{p\in\mathcal{D}\cup\{+\infty\} \\ f(p)=0 \\ p\neq \imath,j,\tilde{j}}} v_p(f) = \frac{k}{12}$$

Preuve. Par le lemme 5, $\partial\mathcal{D}_{X,\varepsilon}$ est d'indice 1 par rapport aux zéros de f. Le théorème des résidus appliqué à $\dfrac{f'}{f}$ s'exprime donc :

$$\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\partial\mathcal{D}_{X,\varepsilon}}\frac{f'}{f}=\sum_{\substack{p\in\mathcal{D}_{X,\varepsilon}\\ f(p)=0}}\mathrm{Res}_p\left(\frac{f'}{f}\right)=\sum_{\substack{p\in\mathcal{D}_{X,\varepsilon}\\ f(p)=0}}v_p\left(f\right)$$

où $v_p(f)$ désigne l'ordre de f au point $p\in\mathbb{C}$.

Calculons l'intégrale proposée grâce au découpage indiqué sur le dessin.

— Par changement de variable $z\longmapsto z+1$, et 1-périodicité de f (et donc de f'), il vient :

$$\int_{\tilde{\alpha}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_{\tilde{\alpha}-1}\frac{f'(z+1)}{f(z+1)}dz=-\int_{\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

— Avec $a=d=0$, $b=-1$ et $c=1$, il vient pour tout $z\in\mathcal{H}$, $f\left(\dfrac{-1}{z}\right)=z^kf(z)$, donc $\dfrac{1}{z^2}f'\left(\dfrac{-1}{z}\right)=kz^{k-1}f(z)+z^kf'(z)$. Par changement de variable $z\longmapsto\dfrac{-1}{z}$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\gamma}}\frac{f'}{f}+\int_{\gamma}\frac{f'}{f}&=\int_{\tilde{\gamma}}\frac{f'}{f}-\int_{\tilde{\gamma}}\frac{f'\left(\frac{-1}{z}\right)}{z^2f\left(\frac{-1}{z}\right)}dz=\int_{\tilde{\gamma}}\frac{f'}{f}-\int_{\tilde{\gamma}}\frac{kz^{k-1}f(z)+z^kf'(z)}{z^kf\left(z\right)}dz\\&=-k\int_{\tilde{\gamma}}\frac{dz}{z}\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\frac{k\imath\pi}{6}\end{aligned}$$

(la limite se calcul, par exemple, via une paramétrisation du cercle).

— Comme vu dans la preuve du lemme, on a, pour un certain $\eta\in]0,1[$ par changement de variable $z\longmapsto\exp(2\imath\pi z)$ et application de la formule des résidus :

$$\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\beta}\frac{f'}{f}=\frac{1}{2\imath\pi}\int_{C(0,\eta)}\frac{g'}{g}=-v_0(g)=-v_\infty(f)$$

où le "$-$" vient du fait que $D(0,\eta)$ est parcouru dans le sens horaire.

— Le théorème d'intégration sur les petits arcs permet d'avoir (les arcs étant parcourus dans le sens indirect et les écarts angulaires tendant respectivement vers $\dfrac{2\pi}{6}$ et π) :

$$\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\delta_j}\frac{f'}{f}\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\frac{-1}{6}v_j(f)$$

$$\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\delta_{\tilde{j}}}\frac{f'}{f}\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\frac{-1}{6}v_{\tilde{j}}(f)$$

$$\frac{1}{2\imath\pi}\int_{\delta_\imath}\frac{f'}{f}\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\frac{-1}{2}v_\imath(f)$$

Par 1-périodicité de f, on a $v_j(f)=v_{\tilde{j}}(f)$, donc il vient, par ce qui précède, en passant à la limite en $\varepsilon \to 0$, la formule des ordres :

$$\frac{1}{2}v_\imath(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{p \in \mathcal{D} \cup \{+\infty\} \\ f(p)=0 \\ p \neq \imath, j, \tilde{j}}} v_p(f) = \frac{k}{12}$$

□

Il reste à prouver le résultat du théorème.

On commence par remarquer qu'il n'existe pas de forme modulaire non triviale de poids impaire. En effet, avec $a = d = -1$ et $b = c = 0$, on prouve que f vérifie $f(z) = -f(z)$ pour $z \in \mathcal{H}$.

— Supposons $k = 0$. Soit a dans l'image de f. Alors $f - a \in M_0$ et admet un zéro. Si $f - a$ n'est pas la fonction nulle, ce qui précède donne :

$$0 < \frac{1}{2}v_\imath(f) + \frac{1}{3}v_j(f) + \sum_{\substack{p \in \mathcal{D} \cup \{+\infty\} \\ f(p)=0 \\ p \neq \imath, j, \tilde{j}}} v_p(f) = \frac{k}{12} = 0$$

C'est absurde, donc $f = a$. Réciproquement, les fonctions constantes sur $\mathcal{H}$ sont bien dans M_0, donc M_0 contient exactement les fonctions constantes et $\dim(M_0) = 1$.

— Supposons $k = 2$. $\frac{1}{6}$ ne pouvant s'écrire comme combinaison linéaire à termes entiers positifs de 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, on en déduit que $M_2 = \{z \longmapsto 0\}$ et $\dim(M_2) = 0$.

— Supposons $k = 4$. On résoud

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + c = \frac{1}{3}$$

pour a, b et c des entiers positifs.

Il vient $a = c = 0$ et $b = 1$. Ainsi, pour $f \in M_4$, f n'admet de zéros, d'ordre 1, sur $\mathcal{D}$ qu'en $j, \tilde{j}$. Pour $g \in M_4$, on a $\frac{f}{g}$ holomorphe, modulaire de poids 0, donc constante. Donc $\dim(M_4) = 1$.

□