DVP Formule d'Euler-Maclaurin et série harmonique

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 228, 230, 246.
- Références :
  - Gourdon,
  - Calcul intégral de Candelpergher ou Analyse numérique et équation différentielle de Demailly.

Définition 1 *Nombres et polynômes de* BERNOULLI. On note $(\tilde{B}_p)_p$ les polynômes de BERNOULLI périodisés (sur $[0,1]$) et $b_p = B_p(0)$ les nombres de BERNOULLI.

Théorème 2 (Formule d'EULER-MACLAURIN)

Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)dt + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)dt$$

Preuve. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n$. On procède par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$, via le prédicat HR(r) :"$\forall f : [m,n] \to \mathbb{C} \in \mathcal{C}^r$, la formule d'EULER-MACLAURIN est vrai" :

— **Initialisation** : Pour $r = 1$, on a $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ sur $]0,1[$, et pour $k \in [\![m, n-1]\!]$, un intégration par parties donne :

$$\int_k^{k+1} \tilde{B}_1(t) f'(t)dt = \left[\tilde{B}_1(t) f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \tilde{B}_1'(t) f(t)dt = \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)dt$$

d'où

$$\int_m^n \tilde{B}_1(t) f'(t)dt = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \frac{f(m)+f(n)}{2} - \int_m^n f(t)dt$$

d'où le résultat pour $r = 1$.

— Pour un certain $r \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$, on suppose HR$(r-1)$ vérifié. Montrons HR(r). Soit $k \in [\![m, n-1]\!]$, sur $]k, k+1[$, on a $\tilde{B}_r' = r\tilde{B}_{r-1}$. De plus, $B_r(0) = B_r(1) = b_r$, donc $\tilde{B}_r$ est continue sur $[k, k+1]$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r-1)!} \int_k^{k+1} \tilde{B}_{r-1}(t) f^{(r-1)}(t)dt &= \frac{1}{r!} \left[\tilde{B}_r(t) f^{(r-1)}(t)\right]_k^{k+1} - \frac{1}{r!} \int_k^{k+1} \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)dt \\ &= \frac{b_r}{r!} \left(f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)\right) - \frac{1}{r!} \int_k^{k+1} \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)dt \end{aligned}$$

En sommant et en multipliant par $(-1)^r$, il vient alors :

$$\frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_m^n \tilde{B}_{r-1}(t) f^{(r-1)}(t)dt = \frac{(-1)^r b_r}{r!} \left(f^{(r-1)}(m) - f^{(r-1)}(n)\right) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)dt$$

Comme les b_{2k+1} sont nuls, on a toujours $(-1)^r b_r = b_r$, et, une fonction $\mathcal{C}^r$ étant $\mathcal{C}^{r-1}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et il vient bien :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} f(k) &= \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)dt + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{b_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_m^n \tilde{B}_{r-1}(t) f^{(r-1)}(t)dt \\ &= \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t)dt + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)dt \end{aligned}$$

□

Théorème 3 Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On note H_n la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la série harmonique. Alors on a le développement asymptotique en $n \to +\infty$:

$$H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

Preuve. On applique la formule d'EULER-MACLAURIN à $f(t) = \frac{1}{t}$ pour $m = 1$ (licite car $\frac{1}{t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^r$). Les dérivées de f sont données par $f^{(p)}(t) = \frac{(-1)^p p!}{t^{p+1}}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
H_n &= \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \int_1^n \frac{1}{t} dt + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!} \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{n^k} - (-1)^{k-1}(k-1)! \right) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_1^n \tilde{B}_r(t) \frac{(-1)^r r!}{t^{r+1}} dt \\
&= \frac{n+1}{2n} + \log(n) + \sum_{k=2}^{r} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} \left(\frac{1}{n^k} - 1 \right) - \int_1^n \tilde{B}_r(t) \frac{dt}{t^{r+1}} \\
&= \frac{n+1}{2n} + \log(n) + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} \left(1 - \frac{1}{n^k} \right) - \int_1^{+\infty} \tilde{B}_r(t) \frac{dt}{t^{r+1}} + \int_n^{+\infty} \tilde{B}_r(t) \frac{dt}{t^{r+1}} \\
&= \log(n) + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} - \int_1^{+\infty} \tilde{B}_r(t) \frac{dt}{t^{r+1}} \right)}_{=\gamma_r} + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} \frac{1}{n^k} + \int_n^{+\infty} \tilde{B}_r(t) \frac{dt}{t^{r+1}}
\end{aligned}$$

On pose $M = \sup_{t \in [0,1]} |B_r(t)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \tilde{B}_r(x) \right|$. On a alors

$$\left| \int_n^{+\infty} \tilde{B}_r(t) \frac{dt}{t^{r+1}} \right| \leq M \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{r+1}} = \frac{M}{r n^r}$$

d'où $\left| \int_n^{+\infty} \tilde{B}_r(t) \frac{dt}{t^{r+1}} \right| = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, et donc

$$H_n = \log(n) + \gamma_r + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k} \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

Il reste à voir que γ_r est indépendant de r. C'est bien le cas, car on a

$$\gamma_r = \lim_{n \to +\infty} H_n - \log(n) = \gamma$$

□