

Indécidabilité de la validité au premier ordre

Antoine DEQUAY

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Nicolas MARKEY.
- Leçon : 914, 924.
- Références :
 - LE BARBENCHON.

Théorème 1 On définit le problème :

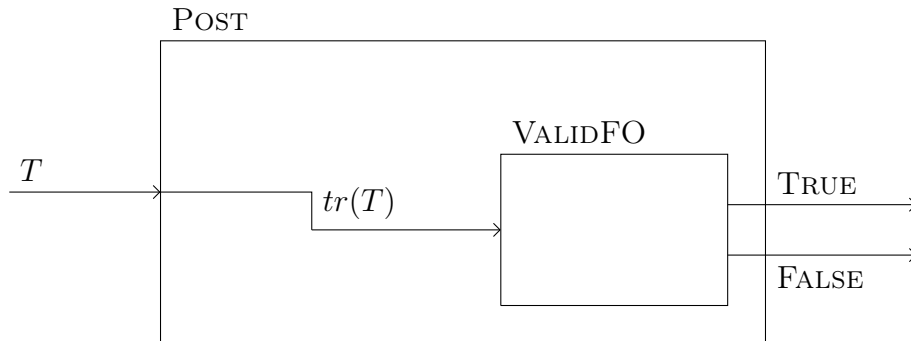
- 1 VALIDFO
- 2 Entrée : φ une formule close du premier ordre.
- 3 Sortie : True si φ est valide, False sinon.

Ce problème est indécidable.

Preuve. Pour prouver l'indécidabilité de VALIDFO, on va réduire POST (sans ε), que l'on sait indécidable, à VALIDFO, où POST (sans ε) est le problème suivant :

- 1 POST
- 2 Entrée : Σ un alphabet fini et un ensemble fini de tuiles $(u_i, v_i)_i$ à valeurs dans $\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$.
- 3 Sortie : True s'il existe $i_1, \dots, i_p$ tels que $u_{i_1} \dots u_{i_p} = v_{i_1} \dots v_{i_p}$.

On cherche donc à exhiber une fonction tr , calculable, qui prends en entrée une instance de POST et la traduit en une instance de VALIDFO telle que $\text{VALIDFO}(tr(T)) = \text{POST}(T)$ pour tout T instance de POST ; on le résume graphiquement :



Soit T une instance de POST. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\Sigma = \{a, b\}$. On se donne alors la signature $\mathcal{S} = \{\mathcal{F}, \mathcal{P}\}$, avec $\mathcal{F} = \{\varepsilon(0), a(1), b(1)\}$ les fonctions (précisées ici avec leur arité) et $\mathcal{P} = \{p(2)\}$ l'ensemble des prédicats.

On écrira, pour $(u_1, \dots, u_n) \in \Sigma^n$, $u_1 u_2 \dots u_n(\cdot) = u_n(\dots u_2(u_1(\cdot)) \dots)$ et on pose (à expliquer en direct) :

$$tr(T) = \varphi \longrightarrow \psi$$

avec

$$\varphi := p(\varepsilon, \varepsilon) \wedge \bigwedge_{i=1}^n (\forall x \forall y p(x, y) \longrightarrow p(u_i(x), v_i(y)))$$

et

$$\psi = \exists x (p(a(x), a(x)) \vee p(b(x), b(x)))$$

Explications sémantiques en direct : " $p(x, y)$ est vrai si et seulement si $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ existe", où

$$\begin{bmatrix} u_1 \dots u_n \\ v_1 \dots v_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Montrons que la fonction de traduction remplit bien son rôle. Soit T une instance de POST, supposons donc $tr(T)$ valide, et montrons que $\text{POST}(T) = \text{TRUE}$.

On se donne le modèle suivant :

- de domaine $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = \Sigma^*$,
- $\varepsilon^{\mathcal{M}}$ correspond au mot vide sur Σ ,
- $u^{\mathcal{M}}(\cdot) : \begin{pmatrix} \Sigma^* & \longrightarrow & \Sigma^* \\ x & \longrightarrow & xu \end{pmatrix}$ pour $u \in \{a, b\}$,
- $p^{\mathcal{M}}(\cdot, \cdot) : \begin{pmatrix} (\Sigma^*)^2 & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ (x, y) & \longrightarrow & \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ existe,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{pmatrix}$

Montrons que $\mathcal{M} \models \varphi$.

On a bien $\mathcal{M} \models p(\varepsilon, \varepsilon)$, car sans prendre de tuiles, on a bien accès à $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$.

Soit $(u, v) \in \Sigma^*$ tel que $\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u \\ y := v \end{array} \right] \models p(x, y)$. Par définition de $p^{\mathcal{M}}$, on a accès à $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la concaténation permet d'obtenir $\begin{bmatrix} uu_i \\ vv_i \end{bmatrix}$, ce qui se traduit par : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u \\ y := v \end{array} \right] \models p(u_i(x), v_i(y))$. Il vient donc bien $\mathcal{M} \models \varphi$.

La formule $tr(T)$ étant valide, pour tout modèle $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models (\varphi \longrightarrow \psi)$. Ainsi, $\mathcal{M} \models \psi$. Par symétrie en a et b , on peut supposer que $\mathcal{M} \models \exists xp(a(x), a(x))$. Il existe donc $\alpha \in \Sigma^*$ tel que $\mathcal{M} \left[x := \alpha \right] \models p(a(x), a(x))$, on a donc accès à $\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha a \end{bmatrix}$, avec $\alpha a \neq \varepsilon$, donc T est bien une instance positive de POST !

Soit maintenant T une instance positive de POST, montrons que $tr(T)$ est valide. Soit $(i_j)_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ tel que $u_{i_1} \dots u_{i_m} = v_{i_1} \dots v_{i_m}$. On note, pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $w \in \{u, v\}$, $w^{(k)} = w_{i_1} \dots w_{i_k}$.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle. Si $\mathcal{M} \not\models \varphi$, alors $\mathcal{M} \models (\varphi \longrightarrow \psi)$. Supposons $\mathcal{M} \models \varphi$, et montrons que $\mathcal{M} \models \psi$.

Montrons pour cela par récurrence sur $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ que $\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u^{(k)}(\varepsilon) \\ y := v^{(k)}(\varepsilon) \end{array} \right] \models p(x, y)$. Pour

$k = 0$, $\mathcal{M} \models p(\varepsilon, \varepsilon)$ car $\mathcal{M} \models \varphi$.

Soit $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, on suppose qu'on a $\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u^{(k)}(\varepsilon) \\ y := v^{(k)}(\varepsilon) \end{array} \right] \models p(x, y)$, montrons que

$$\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u^{(k+1)}(\varepsilon) \\ y := v^{(k+1)}(\varepsilon) \end{array} \right] \models p(x, y)$$

Comme $\mathcal{M} \models \varphi$, en particulier, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{M} \models \forall x \forall y (p(x, y) \longrightarrow p(u_i(x), v_i(y)))$, donc $\mathcal{M} \models \forall x \forall y (p(x, y) \longrightarrow p(u_{i_{k+1}}(x), v_{i_{k+1}}(y)))$. Ainsi,

$$\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u^{(k)}(\varepsilon) \\ y := v^{(k)}(\varepsilon) \end{array} \right] \models (p(x, y) \longrightarrow p(u_{i_{k+1}}(x), v_{i_{k+1}}(y)))$$

et

$$\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u^{(k)}(\varepsilon) \\ y := v^{(k)}(\varepsilon) \end{array} \right] \models p(x, y)$$

donc

$$\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u^{(k)}(\varepsilon) \\ y := v^{(k)}(\varepsilon) \end{array} \right] \models p(u_{i_{k+1}}(x), v_{i_{k+1}}(y))$$

donc

$$\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u^{(k+1)}(\varepsilon) \\ y := v^{(k+1)}(\varepsilon) \end{array} \right] \models p(x, y)$$

Sans perte de généralité, on peut écrire : $u^{(m)} = \tilde{u}a = v^{(m)} = \tilde{v}a$, et on a

$$\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := u^{(m)}(\varepsilon) \\ y := v^{(m)}(\varepsilon) \end{array} \right] \models p(x, y)$$

Ainsi,

$$\mathcal{M} \left[\begin{array}{l} x := \tilde{u}a(\varepsilon) \\ y := \tilde{v}a(\varepsilon) \end{array} \right] \models p(x, y)$$

Ce qui se traduit par

$$\mathcal{M} \left[x := \tilde{u}(\varepsilon) \right] \models p(a(x), a(x))$$

Donc $\mathcal{M} \models \psi$. Ainsi, $\mathcal{M} \models (\varphi \longrightarrow \psi)$, donc $tr(T)$ est valide.

Il reste à remarquer que $tr(\cdot)$ est calculable (comme suite d'opérations finie sur un ensemble fini). On a bien réduit POST à VALIDFO. La décidabilité de VALIDFO induirait donc la décidabilité de POST, que l'on sait indécidable; donc VALIDFO est indécidable. $\square$