# DVP Méthode de Kaczmarz

Antoine Dequay

21 septembre 2022

## Notes

- Prof : .
- Leçons : 162, 226, 233.
- Références :
  - Le Barbenchon.

**Notation** On se place dans $\mathbb{R}^N$, muni de sa structure euclidienne canonique et on note, pour $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $|||M|||$ la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne.

**Théorème 1** (Méthode de KACZMARZ)

Soit $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^N$, $\overline{x}$ la solution de l'équation $Ax = b$, $\left({}^t a_i\right)_{i \in [\![1,N]\!]}$ les lignes de $A$, $(b_i)_{i \in [\![1,N]\!]}$ les coordonnées de $b$, $\alpha_i = \dfrac{a_i}{\|a_i\|} \in \mathbb{R}^N$, $\beta_i = \dfrac{b_i}{\|a_i\|} \in \mathbb{R}$ et :

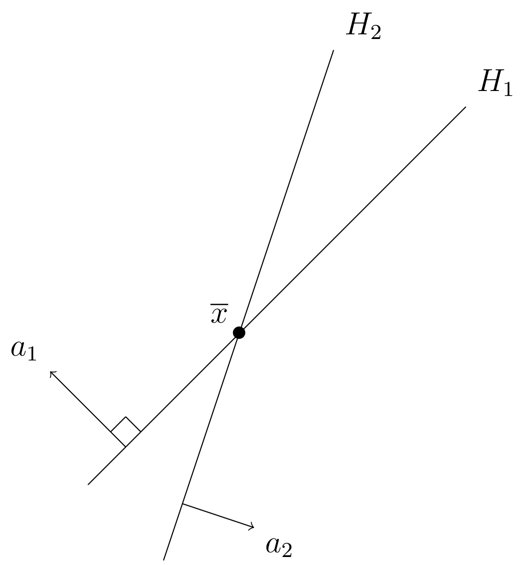
$$H_i = \left\{x \in \mathbb{R}^N, {}^t\alpha_i x = \beta_i\right\} = \beta_i \alpha_i + \mathrm{Vect}(\alpha_i)^\perp$$

pour $i \in [\![1, N]\!]$.

Pour résoudre $Ax = b$, on choisit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ quelconque, puis on construit la suite $(x_n)_{i \in [\![1,n]\!]}$ comme suit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = p_{H_{n+1[N]}}(x_n) \\ x_0 \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\overline{x}$.




Flemme, voir dessin dans de bouquin.

*Preuve.*

**Lemme 2** Soit $u \in \mathbb{R}^N$ unitaire. Alors la matrice associée à $p_{\mathrm{Vect}(u)^\perp}$ est $M = I_N - u{}^t u$. De plus, $|||M||| = 1$, et $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathrm{Vect(u)}^\perp$, $\|Mx\| \leq \|x\|$.

*Preuve.* Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On a : $p_{\mathrm{Vect}(u)}(x) = \langle u | \, x \rangle \, u$ car $u$ est unitaire, et donc

$$p_{\mathrm{Vect}(u)^\perp}(x) = x - \langle u | \, x \rangle \, u = x - \left({}^t u x\right) u = x - u \left({}^t u x\right) = \left(I_N - u{}^t u\right) x$$

d'où le résultat sur $M$.

De plus, par définition de la projection, $Mx$ et $(I_N - M)\,x$ sont orthogonaux. Par le théorème de PYTHAGORE, il vient :

$$\|x\|^2 = \|(I_N - M)\,x + Mx\|^2 = \|(I_N - M)\,x\|^2 + \|Mx\|^2 \geq \|Mx\|^2$$

d'où $|||M||| \leq 1$.

Pour $x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$, on a, par définition de $M$, $Mx = x$, donc $\|x\| = \|Mx\|$, d'où $|||M||| = 1$.

Pour $x \notin \mathrm{Vect}(u)^\perp$, on a $(I_N - M)\,x \neq 0$, d'où, dans ce cas, $\|Mx\| \leq \|x\|$.

□

Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note $M_i$ la matrice associée à $p_{H_i}$.

On commence par remarquer que $\{\overline{x}\} = \bigcap_{i\in[\![1,N]\!]} H_i$. En effet :

$$x \in \bigcap_{i\in[\![1,N]\!]} H_i \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!], {}^t a_i x = b_i \Longleftrightarrow Ax = b$$

et $\overline{x}$ est l'unique solution à $Ax = b$ car $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.

On pose $\varepsilon_n = x_n - \overline{x}$. Par définition, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_{n+1} = M_{n+1[N]}\varepsilon_n$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \|\varepsilon_{n+1}\| = \left\|M_{n+1[N]}\varepsilon_n\right\| = \left|\left\|M_{n+1[N]}\right\|\right| \|\varepsilon_n\| \leq \|\varepsilon_n\|$$

La suite $(\varepsilon_n)_{n\in[\![1,n]\!]}$ est donc décroissante et minorée, donc convergente.

Il reste à montrer que sa limite $\ell$ est 0. On note $T = \prod_{i=N}^{1} M_i$ (le produit n'est pas commutatif), de sorte à ce que $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{kN} = T^k x_0$. Par ce qui précède, on a $|||T||| \leq \prod_{i=N}^{1} |||M_i||| \leq 1$. Supposons que $|||T||| < 1$. Alors, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ \varepsilon_{kN} = T^k\varepsilon_0$, d'où

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|\varepsilon_{kN}\| \leq |||T|||^k \|\varepsilon_0\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui achève la preuve.

Supposons donc qu'il existe $x \in \mathbb{R}^N$, tel que $\|Tx\| = \|x\|$ et montrons qu'alors $x = 0$, ce qui prouvera le résultat. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on a :

$$\|x\| = \|Tx\| \leq \prod_{j=N}^{i+1} |||M_j||| \left\|M_i\left(\prod_{j=i-1}^{1} M_j\right) x\right\| = \left\|M_i\left(\prod_{j=i-1}^{1} M_j\right) x\right\| \leq \|x\|$$

d'où

$$\left\| M_i \left( \prod_{j=i-1}^{1} M_j \right) x \right\| = \|x\| \tag{1}$$

Montrons par récurrence sur $i \in [\![1, N]\!]$ que $x \in \mathrm{Vect}(\alpha_i)^\perp$ et $\left( \prod_{j=i}^{1} M_j \right) x = x$.

— Initialisation : Pour $i = 1$, l'équation (1) et le lemme permettent de prouver $x \in \mathrm{Vect}(\alpha_1)^\perp$. $M_1$ étant une matrice de projection sur $\mathrm{Vect}(\alpha_1)^\perp$, on a bien $M_1 x = x$.

— Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang $i \in [\![1, N-1]\!]$, montrons la au rang $i+1$. (1) et l'hypothèse de récurrence permettent d'avoir $\|M_{i+1}x\| = \|x\|$, et un raisonnement identique à l'initialisation (en remplaçant les 1 par des $i$) permet de conclure que $x \in \mathrm{Vect}(\alpha_{i+1})^\perp$ et que $x = M_{i+1}x = \left( \prod_{j=i+1}^{1} M_j \right) x$.

Ainsi, $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $x \in \mathrm{Vect}(\alpha_i)^\perp$. Par définition des $\alpha_i$, on a donc $Ax = 0$, d'où $x = 0$.

□

**Proposition 3** Dans le cas où l'équation admet des solutions, mais que $A$ n'est pas inversible, la méthode converge toujours vers une solution de l'équation (la projection de $x_0$ sur l'ensemble des solutions).

*Preuve. La faire avec une autre couleur pour indiquer ce qui change directement sur le tableau.*

Il suffit d'adapter la preuve précédente. En notant $S = \left\{x \in \mathbb{R}^N, Ax = b\right\}$ et $S'$ la direction de $S = \overline{x} + S'$ où $\overline{x} = p_S(x_0)$, comme les $M_i$ stabilisent $S'$, ils stabilisent $S'^\perp$ par symétrie et donc $T$ stabilise $S'^\perp$. Par récurrence, $\varepsilon_n \in S'^\perp$ pour $n \in \mathbb{N}$. La même démonstration que plus haut appliquée à $T|_{S'^\perp}$ permet de montrer que $|||T|_{S'^\perp}||| < 1$, ce qui permet de conclure.

□

**Proposition 4** La convergence de la méthode est au plus linéaire.

*Preuve.* Cela vient directement du fait que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\|\varepsilon_{i+1}\|}{\|\varepsilon_i\|} \leq |||M_i||| < 1$$

□

**Proposition 5** Le pré-traitement de la méthode de KACZMARZ se fait en $O(N)$ (calcul successifs des $\|a_i\|$, $\alpha_i$, $\beta_i$ et $\alpha_i\beta_i$). Une itération se fait également en $O(N)$ opérations vu le calcul effectué lors du lemme 2.

**Remarque** Les méthodes itératives usuelles (JACOBI, GAUSS-SIEGEL) ont une convergence linéaire et une complexité en $O(N^2)$ pour une itération, et ne convergent pas tout le temps. La méthode du pivot de GAUSS offre une méthode finie exacte, mais en $O(N^3)$.