# DVP Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$

Antoine Dequay

21 septembre 2022

## Notes

- Prof : .
- Leçons : 262, 264.
- Références :
  - *Séries et intégrales de Fourier*, Dym.

**Théorème 1** On note $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $E = \{\pm e_i, i \in [\![1, n]\!]\}$, suivants une loi uniforme et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0\right) = 1 & \text{si } d \leq 2, \\ \mathbb{P}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} |S_n| = +\infty\right) = 1 & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

*Preuve.* Par définition, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \ldots, e_n \in E$ :

$$\mathbb{P}\left(X_1 = e_1, \ldots, X_n = e_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = e_i) = (2d)^{-n}.$$

Par la formule de transfert, on a, à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $x \in I^d$ avec $I = [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{2\imath\pi S_n \cdot x}\right] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(S_n = k) e^{2\imath\pi k\cdot x} = \sum_{e_1\in E} \ldots \sum_{e_n\in E} (2d)^{-n} e^{2\imath\pi e_1\cdot x} \ldots e^{2\imath\pi e_n\cdot x} \\ &= \left[(2d)^{-1} \sum_{e_1\in E} e^{2\imath\pi e_1\cdot x}\right]^n = \left[d^{-1} \sum_{i=1}^{d} \cos(2\pi x_i)\right]^n \\ &:= \left[f_d(x)\right]^n \end{aligned}$$

A demander vérification calculs **partout**.

On a donc directement :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \widehat{f_d^n}(k) = \int_{I^d} f_d^n(x) e^{-2\imath\pi k\cdot x} dx.$$

En particulier, $\mathbb{P}(S_n = 0) = \int_{I^d} f_d^n \geq 0$, et le nombre de retour à l'origine est donné par (avec la convention $S_0 = 0$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{\varepsilon<1 \\ \varepsilon\to1}} \varepsilon^n \mathbb{P}(S_n = 0) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon<1 \\ \varepsilon\to1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \int_{I^d} f_d^n(t) dt \text{ par Beppo-Lévy ? ? ?}, \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon<1 \\ \varepsilon\to1}} \int_{I^d} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n f_d^n(t) dt \text{ par convergence dominée}, \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon<1 \\ \varepsilon\to1}} \int_{I^d} (1 - \varepsilon f_d^n(t))^{-1} \text{ car } |f_d| \leq 1 \text{ sur } E^d, \text{ donc } |\varepsilon f_d^n| < 1, \\ &= \int_{I^d} (1 - f_d^n(t))^{-1} \text{ par Beppo-Lévy ? ? ?}. \end{aligned}$$

Car $f_d$ (resp. $(1-f_d)^{-1}$) sont continues et positives sur $I^d$ (resp. $I^d \backslash \{(0,\dots,0),(1,\dots,1)\}$.
On a :

$$1 - f_d(x) = d^{-1} \sum_{i=1}^{d} (1 - \cos(2\pi x_i)),$$

donc, pour $|x|$ assez petit ($x_i$ assez petits), on a

$$\cos(2\pi x_i) = 1 - \frac{4\pi^2 x_i^2}{2} + o(x_i^2),$$

donc

$$\frac{1-\cos(2\pi x_i)}{\frac{4\pi^2 x_i^2}{2}} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],$$

donc

$$\pi^2 x_i^2 \leq 1 - \cos(2\pi x_i) \leq 3\pi^2 x_i^2,$$

d'où

$$\frac{d}{3\pi^2 \|x\|_2^2} \leq (1 - f_d(x))^{-1} \leq \frac{d}{\pi^2 \|x\|_2^2}.$$

De même, pour $x$ assez proche de $1_d := (1,\dots,1)$, on a :

$$\frac{d}{3\pi^2 \|x - 1_d\|_2^2} \leq (1 - f_d(x))^{-1} \leq \frac{d}{\pi^2 \|x - 1_d\|_2^2}.$$

Ainsi, comme $\dfrac{1}{\|x\|_2^2}$ est intégrable en 0 si et seulement si $d \geq 3$, on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty & \text{si } d \leq 2, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) < +\infty & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

— Si $d \geq 3$, la somme étant finie, le nombre de retour en 0 est fini p.s.. On peut étendre ce résultat à n'importe quel point à coordonnées entières, par invariance par translation. Ainsi, pour tout $R \in \mathbb{N}$, $(S_n)$ ne revient qu'un nombre fini de fois dans $[\![-R, R]\!]^d$, d'où $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} |S_n| = +\infty\right) = 1$.

— Si $d \leq 2$, avec $p = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0)$ et $N$ le nombre de retours en 0 (instant initial exclu), pour $m \in \mathbb{N}$, on a :$\mathbb{P}(N \geq m) = p^m$. Par l'absurde, supposons $p < 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=m)m = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \left(\mathbb{P}(N\geq m) - \mathbb{P}(N\geq m+1)\right) m = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \left(p^m - p^{m+1}\right) m \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}^*} m(1-p)p^m = (1-p)\times\left(\frac{1}{1-x}\right)'(p) = \frac{1}{1-p} < +\infty \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1_{\{S_n=0\}}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(S_n=0) = +\infty.
\end{aligned}$$

D'où la contradiction, ce qui achève la preuve.

□