DVP Morphismes continus du cercle dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 106, 156, 157.
- Références :
  - *X-ENS Algèbre 2*.

Notation On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Théorème 1 L'ensemble des morphismes de groupes continus de $(\mathbb{S}^1, \times)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est :

$$\left\{ \begin{array}{c} M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists r \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right]\!\right], \\ \exists (k_i)_{i \in [\![1,r]\!]} \in \mathbb{N}^*, M = Q \,\mathrm{Diag}\left(R_{tk_1}, \ldots, R_{tk_r}, (1), \ldots, (1)\right) Q^{-1} \end{array} \right\}$$

où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Preuve. **Analyse** : Soit φ un tel morphisme.

Montrons que $\forall z \in \mathbb{S}^1,\ \det(\varphi(z)) = 1$ (i.e. $\varphi(z) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$).
Le déterminant étant continu, $\psi = \det \circ \varphi$ est un morphisme de groupes continu de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^*$. Comme $\mathbb{S}^1$ est connexe, ψ continue et que $\psi(1) = 1$, $\psi(\mathbb{S}^1) \subseteq \mathbb{R}^{+*}$. C'est même un segment de $\mathbb{R}^{+*}$ car $\mathbb{S}^1$ est compact. Il est donc en particulier borné. Comme $\psi(\mathbb{S}^1)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$, est donc égale à $\{1\}$, d'où $\forall z \in \mathbb{S}^1,\ \varphi(z) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $\forall z \in \mathbb{S}^1,\ \mathrm{Spec}(\varphi) \subset \mathbb{S}^1$.
Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par compacité de $\varphi(\mathbb{S}^1)$, il existe $M > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{S}^1$, $\|\varphi(z)\| \leq M$. En particulier, $\forall z \in \mathbb{S}^1, \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi(z)),\ |\lambda| \leq M$.

Soient $z \in \mathbb{S}^1$, $\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi(z))$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\lambda^p \in \mathrm{Spec}(\varphi(z)^p) = \mathrm{Spec}(\underbrace{\varphi(z^p)}_{\in \varphi(\mathbb{S}^1)})$ donc $|\lambda^p| \leq M$. Ainsi, $(|\lambda^p|)_{p \in \mathbb{Z}}$ est bornée, donc constante égale à 1, d'où : $\forall z \in \mathbb{S}^1,\ \mathrm{Spec}(\varphi(z)) \subset \mathbb{S}^1$.

Relèvement.
On note $\psi : t \longmapsto \varphi(e^{\imath t})$. C'est un morphisme de groupes continu entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. Il n'est pas forcément dérivable. On utilise donc une primitive : on pose $\Psi : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \int_0^x \psi(t)dt \end{pmatrix}$.
Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a $\Psi'(0) = I_n$. Ainsi, $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\Psi(t) = I_n$ et, comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, $\frac{1}{t}\Psi(t)$ et donc à fortiori $\Psi(t)$ est inversible pour t assez petit. Soit donc $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\Psi(a)$ soit inversible. Comme pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(x + u) = \psi(x)\psi(u)$, il vient :

$$g(x) := \int_x^{x+a} \psi(t)dt = \int_0^a \psi(x + u)du = \psi(x) \int_0^a \psi(t)du = \psi(x)\Psi(a)$$

Or, g est dérivable en x par continuité de ψ, donc $\psi(x) = g(x)\Psi(a)^{-1}$ aussi. On peut donc dériver $\psi(x + t) = \psi(x)\psi(t)$, et il vient $\psi'(x + t) = \psi(x)\psi'(t)$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, donc $\psi'(x) = \psi(x)\psi'(0)$. La résolution de l'équation différentielle [1] permet d'obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = e^{Ax}$$

1. Poser $g(x) = \psi(x)e^{-Ax}$, dériver et évaluer en 0.

où $A := \psi'(0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons que A est diagonalisable.
Comme φ est à valeur dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ψ étant 2π-périodique, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = e^{2\pi A + tA} = e^{2\pi A + tA} = e^{2\pi A} e^{tA}$$

donc $e^{2\pi A} = I_n$. On a $\mathrm{Spec}(e^{2\pi A}) = \left\{e^{2\pi\lambda}, \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\right\}$, donc

$$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A),\ e^{2\pi\lambda} = 1,\ \text{donc } \lambda \in \imath\mathbb{Z}$$

Soit $A = D + N$ la décomposition de DUNFORD de A, avec D diagonalisable et N nilpotente et $[D, N] = 0$. On a donc, par commutativité de D et N, $e^{2\pi A} = e^{2\pi N} e^{2\pi D}$ avec $e^{2\pi D}$ diagonalisable. Comme $\mathrm{Spec}(D) = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathrm{Spec}(e^{2\pi D}) = \mathrm{Spec}(e^{2\pi A}) = \{1\}$. Donc $e^{2\pi D} = I_n$ et $e^{2piN} = I_n$.

Supposons par l'absurde que N ne soit pas la matrice nulle. On a donc $\mathrm{Ker}(N) \subsetneq \mathrm{Ker}(N^2)$. Soit donc $X \in \mathrm{Ker}(N^2) \setminus \mathrm{Ker}(N)$, on a :

$$e^{2\pi N} X = X + 2\pi N X \neq X = I_n X$$

ce qui est absurde par ce qui précède. Donc $N = 0$ et A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Conclusion de l'analyse.
A étant une matrice réelle diagonalisable dans $\mathbb{C}$, ses valeurs propres non nulles sont conjuguées. Il existe donc pour un certain $r \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$ tel qu'on ait $(k_i)_{i \in [\![1,r]\!]} \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$A = P \,\mathrm{Diag}(\imath k_1, -\imath k_1, \dots, \imath k_r, -\imath k_r, 0, \dots, 0) P^{-1}$$

et donc

$$e^{tA} = P \,\mathrm{Diag}(e^{t\imath k_1}, e^{-t\imath k_1}, \dots, e^{t\imath k_r}, e^{-t\imath k_r}, 1, \dots, 1) P^{-1}$$

Il existe donc $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$e^{tA} = Q \,\mathrm{Diag}\left(R_{tk_1}, \dots, R_{tk_r}, (1), \dots, (1)\right) Q^{-1}$$

où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ car, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} e^{\imath\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\imath\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\imath & 1 \\ 1 & -\imath \end{pmatrix} R_\theta \begin{pmatrix} -\imath & 1 \\ 1 & -\imath \end{pmatrix}^{-1}$$

Comme les matrices semblables considérées sont réelles, on peut prendre $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ [2], ce qui achève l'analyse.

Synthèse : Soit $\varphi : e^{it} \longmapsto \psi(t)$ comme ci-dessus. Les $t \longmapsto R_{tk},\ k \in \mathbb{Z}$ étant 2π-périodiques, il en est de même pour φ. C'est un morphisme de groupes car $R_{(t+t')k} = R_{tk}R_{t'k}$ pour $k \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{R}$. Il est enfin bien continu car pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2,\ k \in \mathbb{Z},\ \left|e^{k\imath t} - e^{k\imath t'}\right| \leq |k|\left|e^{\imath t} - e^{\imath t'}\right|$ et donc :

$$|\sin(kt) - \sin(kt')|,\ |\cos(kt) - \cos(kt')| \leq |k|\left|e^{\imath t} - e^{\imath t'}\right|$$

□

2. Ecrire $Q = Q_1 + \imath Q_2$, remarquer que le polynôme $\det(Q_1 + Q_2 X)$ est non nul sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{R}$, ...