

DVP : Plus long plongeur

Antoine DEQUAY

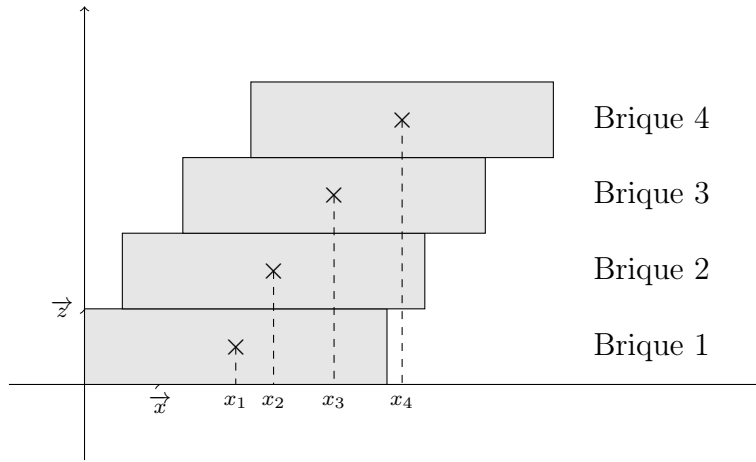
21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 162, 219.
- Références :
 - LE BARBENCHON.

Théorème 1 On se place dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{z})$ On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ briques de longueur $\ell \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ homogènes empilées pour former un plongeur (*faire le dessin en même temps*). Alors il existe un unique plongeur de longueur maximale ℓ_n^* constructible et stable sous l'action du champ gravitation, supposé constant et orienté suivant $-\vec{z}$, et on a

$$\ell_n^* \sim \frac{\ell \ln(n)}{2}$$



Notation On numérote dans l'ordre croissant selon $\vec{z}$ les briques, et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $B_i = (x_i, y_i)$ son centre de gravité. On a donc

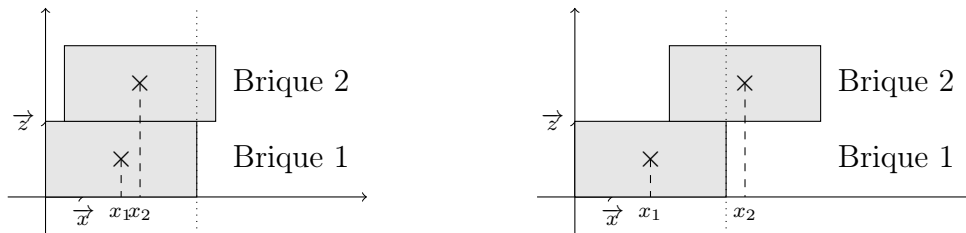
$$0 < \frac{\ell}{2} = x_1 \leq \dots \leq x_n$$

Preuve. On note, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $\tilde{x}_k$ le centre de gravité des briques numérotées de k à n . Donnons une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du plongeur.

Par homogénéité des briques, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_k est l'isobarycentre des 4 points extrémaux de la brique k , et, les briques étant identiques, $\tilde{B}_k$ est donc l'isobarycentre de la famille $(B_i)_{i \in \llbracket k, n \rrbracket}$. Il vient donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tilde{x}_k = \frac{1}{n - k + 1} \sum_{i=k}^n x_i$$

Supposons dans un premier temps que $n = 2$.



La brique numéro 2 tient en équilibre sur la brique numéro 1 si et seulement si la projection verticale (selon $\vec{z}$) de son centre de gravité est situé dans son polygone de sustentation, correspondant ici à la base de la brique 1, c'est à dire si et seulement si, en prenant en compte ce

qui a été fait avant :

$$\tilde{x}_2 = x_2 \leq x_1 + \frac{\ell}{2}$$

Pour $n = 3$, on peut raisonner de même avec la brique 3 et la brique 2, puis avec l'ensemble formé de la brique 2 et de la brique 3 et la brique 1, ce qui donne l'ensemble de conditions :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{x}_3 = x_3 & \leq & x_2 + \frac{\ell}{2} \\ \tilde{x}_2 = \frac{x_3 + x_2}{2} & \leq & x_1 + \frac{\ell}{2} \end{array} \right.$$

En appliquant ce principe de raisonnement par récurrence, on peut donc montrer que la stabilité se traduit, pour n quelconque, par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{x}_i & \leq & x_{i-1} + \frac{\ell}{2} \end{array} \right._{i \in \llbracket 2, n \rrbracket}$$

Introduisons maintenant les avancées successives $(y_i)_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket} = (x_i - x_{i-1})_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket}$ et $y_1 = x_1$. On peut ainsi réécrire le système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x_{i-1} + \frac{1}{n-i+1} \sum_{k=i}^n x_k & \leq & \frac{\ell}{2} \end{array} \right._{i \in \llbracket 2, n \rrbracket}$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{k=i}^n \frac{n-k+1}{n-i+1} y_k & \leq & \frac{\ell}{2} \end{array} \right._{i \in \llbracket 2, n \rrbracket}$$

On raisonne par analyse-synthèse. Supposons l'existence d'un plongeur optimal, et on lui associe la suite d'avancées $(y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Montrons que les inégalités proposées sont saturées. On a :

$$\ell_n^* = \sum_{i=1}^n y_i + \frac{\ell}{2}$$

Supposons par l'absurde que la contrainte associée à $i = 2$ ne soit pas saturée. Alors il serait possible de transformer l'avancée y_2 et $y_2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon := \frac{\ell}{2} - \sum_{k=3}^n \frac{n-k+1}{n-1} y_k$ tout en gardant constantes les autres avancées (cela revient à translater tous les blocs de ε selon $\vec{x}$ sauf le n°1. Le nouveau plongeur obtenu serait donc de longueur $\ell_n^* + \varepsilon > \ell_n^*$, ce qui est absurde. La première contrainte est donc une égalité.

Supposons maintenant qu'il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y_{i_0} = 0$. Il existe alors un plongeur optimal tel que $y_2 = 0$. En effet, il suffit de considérer

$$(y'_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} = (y_1, 0, y_2, \dots, y_{i_0-1}, y_{i_0+1}, \dots, y_n)$$

qui est bien stable et optimal. Pour un tel plongeur, la contrainte associée à $i = 2$ n'est pas saturée (multiplier la contrainte associée à $i = 3$ par $\frac{n-2}{n-1}$).

Ainsi, les y_i sont tous strictement positifs.

Montrons qu'un plongeur optimal sature toutes les contraintes. L'idée va être, pour une contrainte non-saturée, d'augmenter une avancée et diminuer plus légèrement l'avancée précédente, pour aboutir à une contradiction. On prends $n > 2$ (les autres cas sont élémentaires).

Soit $\delta := \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} y_i > 0$ (sert à garder les $y'_i > 0$). Si la contrainte associée à $i = n$ n'est pas une égalité, on pose $\varepsilon = \min\left(\frac{\ell}{2} - y_n, \delta\right) > 0$, $y'_n = y_n + \varepsilon$ et $y'_{n-1} = y_{n-1} - \frac{\varepsilon}{2}$, on vérifie aisément que les avancées $y_1, \dots, y_{n-2}, y'_{n-1}, y'_n$ sont positives, vérifient les contraintes et que la longueur du plongeur associé est $\ell_n^* + \varepsilon \leq \ell_n^*$, ce qui est absurde.

On raisonne de même, par récurrence décroissante, avec $\varepsilon = \min\left(\frac{\ell}{2} - \sum_{k=i}^n \frac{n-k+i}{n-i+1} y_k, \delta\right)$, $y'_i = y_i + \varepsilon$ et $y'_{i-1} = y_i + \frac{n-i}{n-i+1} \varepsilon$.

On peut donc, par opération sur les lignes, réécrire le système de contraintes dans le cas optimal de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = \frac{\ell}{2(n-i+1)} \end{array} \right._{i \in \llbracket 2, n \rrbracket}$$

et $x_1 = y_1 = \frac{\ell}{2}$.

Par ce qui précède, on a bien un plongeur stable optimal! (on pouvait aussi prouver son existence en remarquant que les vecteurs à n coordonnées de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions de stabilité forment un compact, et que la fonction "longueur" y est continue, donc y admet un maximum).

On a donc, pour le plongeur optimal (qui est donc bien unique par ce qui suit) :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k &= \sum_{i=1}^k y_i = y_1 + \sum_{i=1}^k \frac{\ell}{2(n-i+1)} \\ &= y_1 + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} \frac{\ell}{2i} = \frac{\ell}{2} \left(1 + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) \end{aligned}$$

La longueur du plongeur optimal est donc :

$$\ell_n^* = x_n + \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right)$$

Une comparaison série intégrale permet bien de conclure que :

$$\ell_n^* \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{2} \ln(n)$$

□