Processus de Galton-Watson

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Zied Ammari.
- Leçon : 229.
- Références :
  - Walter Appel, *Probabilités pour les non-probabilistes*.

Théorème 1 Soit $(X_i^n)_{(i,n)\in\mathbb{N}^2}$ iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\{\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\}\right) \in \begin{cases} \{0\} & \text{si } \mathbb{P}(X_0^0 = 0) = 0 \\ ]0,1[& \text{si } \mathbb{E}(X_0^0) > 1 \text{ et } \mathbb{P}(X_0^0 = 0) > 0 \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le processus étudié décrit la dynamique de l'évolution d'une population. A l'origine, on s'intéressait à la propagation d'un nom de famille sous l'ère victorienne.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va représenter le nombre d'individus de la $n^{\text{ème}}$ génération, et X_i^n le nombre de descendants de l'individu i de la $n^{\text{ème}}$ génération.

A l'instant initial $n = 0$, on suppose qu'on a un seul individu, donc $Z_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc : $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n$.

On suppose que X admet une espérance, notée m.

On note également la fonction génératrice associée à X $G(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ avec $p_k := \mathbb{P}(X = k)$.

On pose $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. On cherche à calculer la probabilité de l'évènement M :="La population fini par s'éteindre". On a donc $M = \{\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\ \}$. En effet, par la définition de Z_n, on a bien $Z_n = 0 \Longrightarrow Z_{n+1} = 0$. Les évènements $\{Z_n = 0\}$ forment en particulier une suite croissante, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc converge. Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n =: \alpha$$

Lemme 2 La fonction génératrice G_n de Z_n vérifie la relation de récurrence

$$G_{n+1} = G \circ G_n$$

.

Preuve.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \mathbb{E}\left(t^{Z_{n+1}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(t^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} t^{\sum_{i=1}^{k} X_i^n} 1_{k=Z_n}\right) \\
&\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(t^{\sum_{i=1}^{k} X_i^n} 1_{k=Z_n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{k} t^{X_i^n} 1_{k=Z_n}\right) \\
&\underset{\text{indépendance}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(t^{X_i^n}\right) \mathbb{E}\left(1_{k=Z_n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = k\right) \mathbb{E}\left(t^{X_i^n}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = k\right) G_n(t)^k \\
&= G(G_n(t))
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $Z_0 = 1$, $G_0 = Id$ et $G_n = G^n$. De plus, comme $x_n = G_n(0)$, on a :

$$x_{n+1} = G(G_n(0)) = G(x_n)$$

Or, G est continue sur $[0, 1]$ (car les p_k sont positifs) et les x_k sont dans $[0, 1]$, donc α est un point fixe de G.

Lemme 3 α est le plus petit point fixe de G.

Preuve. Soit β le plus petit point fixe de G sur $[0, 1]$ (Il existe car 1 est point fixe de G).

$$\forall x \in [0, 1],\ G'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k t^{k-1} \geq 0$$

La fonction génératrice est donc croissante sur $[0, 1]$, et on a $G([0, \beta]) \subseteq [G(0), G(\beta)] \subseteq [0, \beta]$. Comme $x_0 = 0 \in [0, \beta]$, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \beta]$, donc converge dans $[0, \beta]$. Donc $\alpha = \beta$. □

On commence par remarquer que $p_0 = 1$ si et seulement si 0 est point fixe de G, et dans ce cas $\alpha = 0$. Sinon, on montre que G est convexe via la caractérisation de la dérivée seconde :

$$G''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p_k t^{k-2} \geq 0$$

Trois cas sont alors possibles, si on suppose $p_0 \neq 1$:

— $G'(1) = m > 1$. Alors, comme 0 n'est pas un point fixe de G, on a $\alpha \in]0,1[$. C'est le cas sur-critique.

— $G'(1) = m < 1$. Alors, $\alpha = 1$ par convexité de G. C'est le cas sous-critique.

— $G'(1) = m = 1$, c'est le cas critique. On a deux sous-cas à traiter :

  — $p_0 + p_1 = 1$: Comme $m = 1$, on en déduit que $p_0 = 0$ et on a déjà traité ce cas : $\alpha = 0$.

  — $p_0 + p_1 < 1$: Il existe donc $k \geq 2$ tel que $p_k > 0$. On a alors :

$$G''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p_k t^{k-2} > 0$$

  Donc G est strictement convexe. En particulier, sa courbe est au dessus de sa tangente en 1, donc au dessus de la droite $y = x$. On en conclut que $\alpha = 1$.

$\square$