DVP Prolongement de la fonction Γ d'Euler et formule de Weierstrass

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 236, 239, 265.
- Références :
  - Zuily-Queffelec, p.318.
  - Aller voir Amar et Mathéron, *Analyse complexe*, pour le critère d'holomorphie, p.157.

Proposition 1 La fonction Γ d'EULER

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad (\text{où } t^{z-1} := e^{(z-1)\ln(t)})$$

est bien définie et holomorphe sur $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Preuve. On utilise le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, avec $f(t,z) := t^{z-1}e^{-t}$:

— A $t \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé, $f(t,\cdot)$ est bien holomorphe sur $\mathbb{C}$,

— A $z \in \Omega_0$ fixé, $f(\cdot, z)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, car

$$|f(t,z)| = e^{\ln(t)(\mathrm{Re}(z)-1)-t}$$

— Pour K un compact de Ω_0, $\mathrm{Re}(z) \in [a,b]$, $a > 0$, pour $z \in K$, donc

$$\forall z \in K, t \in \mathbb{R}^{+*}, |f(t,z)| \leq \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t \in]0,1] \\ t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Ces fonctions étant intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$, et Ω_0 étant un ouvert de $\mathbb{C}$, on peut bien conclure grâce au théorème d'holomorphie sous l'intégrale.

□

Théorème 2 La fonction Γ se prolonge à $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ en une fonction holomorphe, dont le résidu en $-n$ est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ (ces pôles sont par ailleurs simples).

Preuve. Une intégration par parties permet d'avoir :

$$\forall z \in \Omega_0,\ \Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)$$

Ainsi, en itérant le procédé, on peut prouver que (avec la convention que le produit vaut 1 quand il est indexé sur le vide $\emptyset$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega_0,\ \Gamma(z) = \Gamma(z+n)\prod_{i=1}^{n}(z+i-1)^{-1}$$

A $n \in \mathbb{N}$ fixé, le membre de droite définit une fonction holomorphe sur

$$\Omega_n := \{z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}, \mathrm{Re}(z) > -n\}$$

qui coïncide avec Γ sur Ω_0 ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Ainsi, par prolongement analytique, on a affaire à un prolongement holomorphe de Γ à Ω_n. Ceci étant vrai pour tout n, Γ se prolonge bien à $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a au voisinage de $-n$:

$$(z+n)\Gamma(z) = (z+n)\Gamma(z+n+1)\prod_{i=1}^{n+1}(z+i-1)^{-1} = \Gamma(z+n+1)\prod_{i=1}^{n}(z+i-1)^{-1} \underset{z\to -n}{\longrightarrow} \Gamma(1)\prod_{i=1}^{n}(-i)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

D'où le résultat attendu sur les résidus.

□

Théorème 3 On a la formule de WEIERSTRASS :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

qui prouve en particulier que la fonction $\dfrac{1}{\Gamma}$ se prolonge en une fonction entière.

Preuve. On considère, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} 1_{[0,n]} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

qui converge vers $\Gamma(x)$ par convergence dominée, grâce à la domination (licite car $1-u \leq e^{-u}$ pour $u \in [0,1]$) :

$$\left| t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \right| = t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \leq t^{x-1}e^{-t}$$

qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ par ce qu'on a vu précédemment.

Une intégration par parties donne :

$$I_n(x) = \left[\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n - \int_0^n \frac{t^x}{x}\frac{-n}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{1}{x}\frac{n}{n}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

En itérant le processus, il vient :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x+i}\frac{n-i}{n}\right)\int_0^n t^{x+n-1}dt = \frac{n!}{n^n}\frac{n^{x+n}}{x+n}\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)^{-1} \\ &= \frac{n^x}{x}\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{x+i} = \left(xn^{-x}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x}{i}\right)\right)^{-1} \end{aligned}$$

La fonction Γ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme intégrale d'une fonction strictement positive, donc on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} xn^{-x}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x}{i}\right)$$

Or,

$$n^{-x} = e^{-x\ln(n)} = e^{xH_n}e^{x(H_n-\ln(n))}$$

où H_n désigne la n-ième somme partielle de la série harmonique. Comme $H_n - ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$ la constante d'EULER, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{i}\right) e^{-\frac{x}{i}}$$

Il reste à montrer que la formule définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$. Il suffit de prouver que le produit est bien holomorphe, les autres fonctions entrant en jeu l'étant clairement. On utilise le critère d'holomorphie d'un produit infini de fonctions holomorphes : Il suffit de prouver que $\sum_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \left(1 + \frac{x}{i}\right)\right)$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$, les fonctions sous le produit étant bien holomorphes sur $\mathbb{C}$. Soit $R \in \mathbb{R}^{+*}$, $i \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathcal{D}(0, R)$, on a :

$$\begin{aligned}\left|1 - \left(1 + \frac{z}{i}\right) e^{-\frac{z}{i}}\right| &= \left|1 - \left(1 + \frac{z}{i}\right)\left(1 - \frac{z}{i} + O_R\left(\frac{1}{i^2}\right)\right)\right| = \left|1 - \left(1 - \frac{z^2}{i^2}\right) + O_R\left(\frac{1}{i^2}\right)\right| \\ &= \left|\frac{z^2}{i^2} + O_R\left(\frac{1}{i^2}\right)\right| = O_R\left(\frac{1}{i^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, le produit étudié est une fonction holomorphe pour tout $R \in \mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathcal{D}(0, R)$, donc on a bien affaire à une fonction entière. La fonction coïncidant avec $\frac{1}{\Gamma}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui admet un point d'accumulation, on a bien le résultat évoqué.

□