DVP Séries de Fourier des applications continues

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 208, 228, 246.
- Références :
  - Bernis.

Définition 1 $\mathcal{G}_\delta$. (Rudin)

On appelle $\mathcal{G}_\delta$ une intersection dénombrable d'ouverts.

Rappel 2 — On se place dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ des applications 2π périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,

— On note, pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f)$ le coefficient de Fourier de f d'indice k, et

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{\imath k \cdot}.$$

Théorème 3 1. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense D de $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$, tel que pour tout $f \in D$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(x_0)| = +\infty.$$

(en particulier, la série de Fourier de f diverge en x_0.

2. Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense Δ de $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que pour tout $f \in \Delta$,

$$\left\{ x \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty \right\}$$

soit un $\mathcal{G}_\delta$ dense de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Preuve.

1. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\imath kt} dt e^{\imath kx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{k)=-n}^{n} e^{\imath k(x-t)} dt}_{=D_n(x-t)}.$$

On rappelle qu'on a, pour $x \not\equiv 0 \ [2\pi]$:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Par changement de variable, on a :

$$S_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x-u) du = S_n\left(f(x-\cdot)\right)(0).$$

Comme l'application $\begin{pmatrix} \mathcal{C}_{2\pi} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{2\pi} \\ f & \longmapsto & f(x-\cdot) \end{pmatrix}$ est un homéomorphisme, donc transforme un $\mathcal{G}_\delta$ est un $\mathcal{G}_\delta$. Il suffit donc de prouver le premier point pour $x_0 = 0$. On cherche à appliquer le théorème de Banach-Steinhaus.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les formes linéaires

$$l_n : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & S_n(f)(0) \end{array} \right).$$

On a alors, par parité de D_n :

$$|l_n(f)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(-t) f(t) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |D_n(t)||f(t)| dt \leq \|D_n\|_{\mathbb{L}_1} \|f\|_\infty.$$

Donc l_n est continue sur $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ et $\|l_n\|_{\mathcal{L}_c} \leq \|D_n\|_{\mathbb{L}_1}$.

De plus, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, en posant $f_\varepsilon = \dfrac{D_n}{\varepsilon + |D_n|}$, on a $f_\varepsilon \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{2\pi}}(0,1)$, et :

$$l_n(f_\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)| + \varepsilon} dt \geq \int_0^{2\pi} \frac{D_n(t)^2 - \varepsilon^2}{|D_n(t)| + \varepsilon} = \int_0^{2\pi} (|D_n(t)| - \varepsilon) \, dt = \|D_n\|_{\mathbb{L}_1} - 2\pi\varepsilon.$$

D'où, en passant à la limite en ε : $\|l_n\|_{\mathcal{L}_c} = \|D_n\|_{\mathbb{L}_1}$.

On peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus appliqué à la famille $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

— Soit il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|l_n\|_{\mathcal{L}_c} \leq M$,

— Soit il existe D un $\mathcal{G}_\delta$ dense de $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que pour tout $f \in D$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |l_n(f)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(0)| = +\infty.$$

Pour conclure, il reste à voir qu'on ne se trouve pas dans la première situation. Par ce qui précède, on a :

$$\|l_n\|_{\mathcal{L}_c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|} dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\frac{t}{2}\right|} dt$$
$$\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

2. Soit x_k une suite dense de $[-\pi, \pi[$, et D_k un $\mathcal{G}_\delta$ dense associé comme dans le premier point.

   On pose $\Delta = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k$. C'est bien un $\mathcal{G}_\delta$ par définition, dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ par théorème de Baire. Par définition, pour $f \in \Delta$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(x_k)| = +\infty.$$

Pour $f \in \Delta$, on a :

$$\begin{aligned}\left\{x \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\right\} &= \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(x)| > p\right\} \\ &= \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}, |S_n(f)(x)| > p\}\right).\end{aligned}$$

Par continuité de S_n, $\{x \in \mathbb{R}, |S_n(f)(x)| > p\}$ sont ouverts, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}, |S_n(f)(x)| > p\}$ aussi, donc l'ensemble considéré est bien un $\mathcal{G}_\delta$. Il est enfin dense dans $\mathbb{R}$ car il contient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que les $S_n(f)$ sont 2π périodiques.

$\square$