

DVP Sous-algèbres réduites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Antoine DEQUAY

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 153.
- Références :
 - LE BARBENCHON.

Définition 1 *Sous-algèbre réduite.* Une sous-algèbre est dite réduite si elle ne possède pas d'élément nilpotent non nul.

Théorème 2 Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre réduite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors ses éléments sont codiagonalisables.

Preuve.

— **On commence par remarquer qu'on peut supposer que $I_n \in \mathcal{A}$.**

En effet, montrons que $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est une sous-algèbre réduite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On remarque tout d'abord que c'est bien un algèbre, car $\mathcal{A}$ l'est. Soit $M = A + \lambda I_n \in \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ nilpotente. Montrons que $M = 0$.

— Si $\lambda = 0$, alors $M = A \in \mathcal{A}$, donc $M = 0$,

— Si $\lambda \neq 0$: M est nilpotente, donc son spectre est réduit à $\{0\}$, donc $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(M - \lambda I_n) = \{-\lambda\} \neq \{0\}$, donc A est inversible.

Ainsi, $AM = A^2 + \lambda A = MA \in \mathcal{A}$, donc AM est également nilpotente dans $\mathcal{A}$, donc $MA = 0$, d'où $M = 0$.

Ainsi, comme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$, si on prouve le résultat sur $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$, on l'aura sur $\mathcal{A}$, donc on peut supposer que $I_n \in \mathcal{A}$.

— Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de $A \in \mathcal{A}$, $\chi = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ son polynôme caractéristique et $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.

Alors, par CAYLEY-HAMILTON, comme $\chi \mid P^{m:=\max(m_1, \dots, m_r)}$, $P(A)^m = 0$, donc $P(A) = 0$ car $\mathcal{A}$ est réduite. Comme P est scindé à racines simple, **A est diagonalisable.**

— On identifie les matrices colonnes et les vecteurs, ainsi que les matrices carrées et les endomorphismes (canoniquement) associés.

Par ce qui précède, on peut décomposer $\mathbb{C}^n$ grâce aux sous-espaces propres de $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A).$$

On note p_i la projection sur $E_{\lambda_i}(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r E_{\lambda_k}(A)$. Ainsi, $I_n = \sum_{i=1}^r p_i$ et

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i.$$

Donc A est combinaison linéaire de projecteurs. Ces projecteurs sont dans $\mathcal{A}$:

On peut utiliser un polynôme interpolateur pour annuler les autres valeurs propres et ne garder que celle qui nous intéresse et l'envoyer sur 1...

- Comme on sait qu'une famille d'endomorphismes diagonalisables sur un K -espace vectoriel de dimension finie commutant 2 à 2 est co-diagonalisable, il suffit de vérifier, par ce qui précède, que pour $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ un projecteur, $AB = BA$.

On a $B^2 = B$, donc :

$$(BAB - BA)^2 = BABBAB - BABBA - BABAB + BABA = 0.$$

Ainsi, $BAB - BA$ est nilpotent donc nul, donc $BAB = BA$. De même, $BAB = AB$, d'où le résultat.

□