DVP Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendrés par les translatés

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 151, 159, 221, 228.
- Références :
  - *X-ENS Algèbre 1*, p.300.

Notation Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_a f : x \longmapsto f(x+a)$ la translatée de f.

Théorème 1 Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\dim \underbrace{(\mathrm{Vect}\,(\tau_a f, a \in \mathbb{R}))}_{=E} < +\infty$ si et seulement si $f \in \mathcal{C}^\infty$ est solution d'une équation différentielle homogène à coefficients constants.

Dans ce cas, l'ordre minimal d'une telle EDL est $\dim(E)$ et E est l'espace des solutions.

Preuve.

Lemme 2 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Alors $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \left(\mathbb{K}^{\mathbb{K}}\right)^n$ est libre dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ si et seulement si il existe $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $(f_i(x_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ soit inversible.

Preuve. **Supposons la famille liée.** Alors les lignes de la matrice $(f_i(x_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sont liées via les mêmes relations que pour la famille $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, donc la matrice n'est pas inversible.

Supposons la famille libre. Soit $F = \mathrm{Vect}(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, de dimension n. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application d'évaluation en a est une forme linéaire sur F.

Montrons que A, l'ensemble des applications d'évaluation est une partie génératrice de F^*. Si $f \in A^0$, $\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) = e_a(f) = 0$, donc $f = 0$ et il vient :

$$\mathrm{Vect}(A) = \left((\mathrm{Vect}(A))^0\right)^\perp = \left(A^0\right)^\perp = 0^\perp = F$$

Ainsi, F^* étant de dimension n, il existe $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in F^n$ tel que $(e_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ soit une base de F^*. Montrons que ces points de f rendent $M = (f_i(x_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ inversible. Il suffit de montrer que les lignes $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de M forment une famille libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$. Alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = e_{x_j}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right) = 0$. $(e_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ étant une base de F^*, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in (F^*)^0 = \{0\}$. $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ étant une base de F , il vient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qui montre que $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre, et donc que M est inversible.

□

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et E associé. On suppose E de dimension n finie. Soit $(\tau_{a_i} f)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des translatées de f formant une base de E et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tels que $M = (\tau_{a_i} f(x_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ soit inversible. La fonction f étant dérivable, les $\tau_{a_i} f$ le sont aussi, donc les éléments de $E = F$ aussi.

Soit $g \in E$, montrons que $g' \in E$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\tau_a g \in \mathrm{Vect}(\tau_{a+x_i} f)_{i\in[\![1,n]\!]} \subseteq E$ donc il existe $(\lambda_i(a))_{i\in[\![1,n]\!]}$ tels que $\tau_a g = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a)\tau_{x_i} f$. Montrons que les fonctions λ_i sont dérivables. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$g(a + x_j) = \tau_a g(x_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a)\tau_{x_i} f(x_j)$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix}$$

M étant inversible, ${}^tM$ l'est aussi, et les $\lambda_i(a)$ sont combinaisons linéaires des $\tau_{x_i}g$ qui sont dérivables, d'où le résultat.

En dérivant par rapport à a et en évaluant en $a = 0$, et il vient $g' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(0)\tau_{x_i}f \in E$. Ainsi, les éléments de E sont $\mathcal{C}^\infty$ et leurs dérivées restent dans E. C'est en particulier vrai pour f. Comme E est de dimension $n < +\infty$, il existe $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $f^{(p)} \in \mathrm{Vect}(f(i))_{i\in[\![1,p-1]\!]}$. Ainsi, f est solution d'une équation linéaire homogène à coefficients constants d'ordre p.

Réciproquement, si f est solution d'une équation linéaire homogène à coefficient constants d'ordre p, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a f$ vérifie les mêmes équations. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle étant un sous-espace vectoriel de dimension p, on a bien le résultat attendu.

$\square$