DVP Système hyperbolique linéaire

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 221, 239, 250.
- Références :
    - Bernis.

Remarque On trouve ce type d'équation par linéarisation de phénomènes de transport, propagation d'ondes (ex : équation d'EULER compressible pour un gaz parfait polytropique, modélisation du trafic routier...).

On étend la transformée de FOURIER aux fonctions vectorielles, coefficient par coefficient.

On note :

$$\langle \cdot \rangle : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ \xi & \longmapsto & \sqrt{1+|\xi|^2} \end{pmatrix}$$

Théorème 1 Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > m$, $u_0 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$ tel que

$$\xi \longmapsto \langle \xi \rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u_0}(\xi) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$$

et $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$.

Alors il existe une unique application $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m))$ telle que pour tout $(j,t) \in [\![1,m]\!] \times \mathbb{R}^+$, $\partial_{x_j} u(t,\cdot) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$ et

$$\begin{cases} \partial_t u + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_j \partial_{x_j} u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{1}$$

Preuve.

Lemme 2 Pour $\xi \in \mathbb{R}^m$, $A(\xi) := \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi_i A_i \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$ et, par continuité de la transconjugaison, on a :

$$(\exp(\imath t A(\xi)))^* = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((\imath A(\xi))^*)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\imath A(\xi))^n}{n!} = \exp(-\imath t A\xi)$$

donc $\exp(\imath t A(\xi))$ est unitaire, et

$$\|\exp(\imath t A(\xi))\|_{\mathcal{L}} = 1$$

Montrons l'existence de u. On suppose qu'une telle solution existe et est suffisamment régulière pour effectuer les calculs suivants (par exemple, on suppose $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$). L'application de la transformée de FOURIER en x à (1) permet d'avoir :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + 2\imath\pi \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi_i A_i \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_0 \text{ pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{2}$$

A $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixé, on à affaire à un système différentiel linéaire à coefficient constant, donc $\hat{u}$ doit coïncider avec

$$\tilde{u} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ (t,\xi) & \longmapsto & \exp(-2\imath\pi t A(\xi))\hat{u_0}(\xi) \end{pmatrix}$$

Montrons que la transformée de FOURIER inverse de $\tilde{u}$ est bien solution de notre problème.

— **Montrons que $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{u})$ est bien définie** : Pour $(t,\xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$, on a, par le lemme :

$$|\tilde{u}(t,\xi)| = |\exp(-2\imath\pi t A(\xi))\hat{u_0}(\xi)| \leq \left| \langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u_0}(\xi) \times \langle\xi\rangle^{-\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)} \right|$$

Par hypothèse, $\left|\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u_0}(\xi)\right| \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$ et, comme $\alpha > m$, $\left|\langle\xi\rangle^{-\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\right| \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$. Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ, le produit de ces fonctions est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^m)$, donc on a

$$\tilde{u}(t,\cdot) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m)$$

et ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, l'application suivante est bien définie :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2\imath\pi x\cdot\xi}\tilde{u}(t,\xi)d\xi$$

— **Montrons que** $\forall x \in \mathbb{R}^m,\ u(\cdot,x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^m)$: Pour $(x,\xi) \in (\mathbb{R}^m)^2$, $t \longmapsto e^{2\imath\pi x\cdot\xi}\tilde{u}(t,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.On peut majorer sa dérivée, pour $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\left|-2\imath\pi e^{2\imath\pi x\cdot\xi} A(\xi)\tilde{u}(t,\xi)\right| &\leq 2\pi \|A(\xi)\|_{\mathcal{L}} |\hat{u_0}(\xi)| \leq 2\pi \left\| \sum_{i=1}^m \xi_i A_i \right\|_{\mathcal{L}} |\hat{u_0}(\xi)| \\ &\leq 2\pi m \max_{i\in[\![1,m]\!]} \|A_i\|_{\mathcal{L}} \frac{|\xi|}{\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1}} \left|\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u_0}(\xi)\right| \\ &\leq 2\pi m \max_{i\in[\![1,m]\!]} \|A_i\|_{\mathcal{L}} \langle\xi\rangle^{-\frac{\alpha}{2}} \left|\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u_0}(\xi)\right|\end{aligned}$$

De nouveau, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ permet de montrer que le second membre de la dernière inégalité est dans $\mathbb{L}^1$. Ce membre étant indépendant de t, le théorème de régularité sous le signe d'intégration permet bien de prouver que $u(\cdot,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$.

— **Montrons que les $\partial_{x_i} u$ existent** : Pour $i \in [\![1,m]\!]$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixés, $x \longmapsto e^{2\imath\pi x\cdot\xi}\tilde{u}(t,\xi)$ est partiellement dérivable sur $\mathbb{R}^m$ selon x_i, de dérivée partielle

$$x \longmapsto 2\imath\pi\xi_i e^{2\imath\pi x\cdot\xi}\tilde{u}(t,\xi)$$

Un raisonnement similaire à l'étape précédente et l'utilisation de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ permet de montrer que cette fonction est majorée par une fonction $\mathbb{L}^1$ indépendante de x. Ainsi, le théorème de régularité sous le signe d'intégration montre bien que $\partial_{x_i} u$ est bien définie.

— **Montrons que u vérifie bien (1) et que** $u(0,\cdot) = u_0$: Par ce qui précède, on peut dériver sous le signe intégrale, et on a, pour $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= -\int_{\mathbb{R}^m} 2\imath\pi e^{2\imath\pi x\cdot\xi} A(\xi)\tilde{u}(t,\xi)d\xi \\ &= -\sum_{i=1}^m A_i \int_{\mathbb{R}^m} 2\imath\pi\xi_i e^{2\imath\pi x\cdot\xi}\tilde{u}(t,\xi)d\xi = -\sum_{i=1}^m A_i\partial_{x_i}u(t,x)\end{aligned}$$

De plus, $u_0 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$, donc $\hat{u_0}$ aussi. On a déjà vu que $\hat{u_0} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^m)$, donc la transformé de Fourier au sens $\mathbb{L}^1$ de u_0 coïncide avec sa transformée de Fourier au sens $\mathbb{L}^2$, d'où $u(0,\cdot) = u_0$.

Il reste à voir que u **est à valeurs dans** $\mathbb{R}^m$: c'est bien le cas car $\forall (t,\xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$, $\overline{\tilde{u}}(t,\xi) = \tilde{u}(t,-\xi)$, et $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$,

$$\overline{u}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2\imath\pi x\cdot(-\xi)}\tilde{u}(t,-\xi)d\xi = u(t,x)$$

par changement de variable linéaire $\xi \longmapsto -\xi$.

— **Montrons que** $u(t,\cdot)$ **et** $\partial_{x_i}u(t,\cdot)$ **sont dans** $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$: Pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ et $i \in [\![1,m]\!]$,

$$|\tilde{u}(t,\xi)|^2 \leq |\hat{u_0}(\xi)|^2$$

et

$$|\xi_i\tilde{u}(t,\xi)|^2 \leq |\xi_i|^2|\hat{u_0}(\xi)|^2 \leq \langle\xi\rangle^2 |\hat{u_0}(\xi)|^2 \leq \left|\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1}\hat{u_0}(\xi)\right|^2$$

Donc, par hypothèse sur $\hat{u_0}$, $\xi \longmapsto \tilde{u}(t,\xi)$ et $\xi \longmapsto \xi_i\tilde{u}(t,\xi)$ sont dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$. Par théorème de Plancherel, leurs transformées de Fourier inverse sont dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m)$. Or, par ce qui précède, ces fonctions sont également des éléments de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m)$, donc leurs transformées de Fourier inverses sont bien $u(t,\cdot)$ et $\partial_{x_i}u(t,\cdot)$.

— **Montrons enfin que** $t \longmapsto u(t,\cdot)$ **est dérivable de** $\mathbb{R}^+$ **dans** $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$: Pour $(t,\xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$, on a :

$$\left|\frac{\tilde{u}(t',\xi)-\tilde{u}(t,\xi)}{t'-t} - \partial_t\tilde{u}(t,\xi)\right|^2 \underset{\substack{t'\to t \\ t'\in\mathbb{R}^+\setminus\{t\}}}{\longrightarrow} 0$$

De plus, pour tout $t' \in [t-1,t+1]\setminus\{t\} \cap \mathbb{R}^+$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à $\theta\tilde{u}(\theta,\xi) - (\theta-t)\partial_t\tilde{u}(t,\xi)$ permet d'avoir, avec ce qui précède, pour $\xi \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\tilde{u}(t',\xi)-\tilde{u}(t,\xi)}{t'-t} - \partial_t\tilde{u}(t,\xi)\right|^2 &\leq 4 \sup_{s\in[t-1,t+1]\cap\mathbb{R}^+} |\partial_t\tilde{u}(t,\xi)| \\ &\leq 14\pi^2m^2 \max_{i\in[\![1,m]\!]} \|A_i\|_{\mathcal{L}}^2 \left|\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1}\hat{u_0}(\xi)\right|^2\end{aligned}$$

Le dernier majorant est $\mathbb{L}^1$ et indépendant de t'. Le théorème de convergence dominée permet alors d'écrire :

$$\left\|\frac{\tilde{u}(t',\cdot)-\tilde{u}(t,\cdot)}{t'-t}-\partial_t\tilde{u}(t,\cdot)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \underset{\substack{t'\to t\\ t'\in\mathbb{R}^+\setminus\{t\}}}{\longrightarrow} 0$$

Par théorème de Plancherel (isométrie), pour tout $t'\in\mathbb{R}^+\setminus\{t\}$,

$$\left\|\frac{\tilde{u}(t',\cdot)-\tilde{u}(t,\cdot)}{t'-t}-\partial_t\tilde{u}(t,\cdot)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2=\left\|\frac{u(t',\cdot)-u(t,\cdot)}{t'-t}-\partial_t u(t,\cdot)\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

Ainsi, par passage à la limite en t, $t\longmapsto u(t,\cdot)$ est dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$, de dérivée $t\longmapsto\partial_t u(t,\cdot)$, donc $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m))$, ce qui permet d'achever la preuve de l'existence de u.

Montrons l'unicité de u. Par linéartié du système, il suffit de démontrer le résultat pour $u_0=0$. Montrons donc qu'alors, 0 est la seule solution du système. Soit donc $v\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m))$ une solution du système.

L'application $V:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)\\ t & \longmapsto & \|v(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2}^2\end{pmatrix}$ est dérivable comme composée de fonctions différentiables ($\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{L}^2}$ est continue sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$ par Cauchy-Schwartz, donc différentiable, et $t\longmapsto v(t,\cdot)$ est dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)$ par définition) et on a, pour $t\in\mathbb{R}^+$:

$$V'(t)=2\left\langle\partial_t v(t,\cdot),v(t,\cdot)\right\rangle_{\mathbb{L}^2}$$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ dans $H^1(\mathbb{R}^m)$ (admis), pour $t\in\mathbb{R}^+$ fixé, on se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{L}^2}}v(t,\cdot)$ et $\forall i\in[\![1,m]\!]$, $\partial_{x_i}u_n\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{L}^2}}\partial_{x_i}v(t,\cdot)$. Pour $i\in[\![1,m]\!]$, on définit :

$$T_i:\begin{pmatrix}\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (w_1,w_2) & \longmapsto & \langle A_iw_1,w_2\rangle_{\mathbb{L}^2}\end{pmatrix}$$

qui est bilinéaire symétrique par symétrie de A_i et continue par inégalité de Cauchy-Schwartz.

Pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, donc on a, par symétrie de A_i et théorème de Fubini qui permet de faire une intégration par partie selon x_i :

$$\langle A_i\partial_{x_i}u_n,u_n\rangle_{\mathbb{L}^2}=\langle\partial_{x_i}u_n,A_iu_n\rangle_{\mathbb{L}^2}=-\langle u_n,A_i\partial_{x_i}u_n\rangle_{\mathbb{L}^2}$$

donc $T_i(\partial_{x_i}u_n,u_n)=0$.

Par continuité de T_i, on a :

$$T_i(\partial_{x_i}u_n,u_n)\underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{R}}}T_i(\partial_{x_i}v(t,\cdot),v(t,\cdot))$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{m} T_i(\partial_{x_i} v(t,\cdot), v(t,\cdot)) = 0$$

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $V'(t) = 2\langle \partial_t v(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle_{\mathbb{L}^2} = -2\sum_{i=1}^{m} T_i(\partial_{x_i} v(t,\cdot), v(t,\cdot)) = 0$. Ainsi, comme $V(0) = 0$, V est la fonction nulle, donc $v(t,x) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et presque tout $x \in \mathbb{R}^m$, donc $v = 0$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^m))$, ce qui achève la preuve.

$\square$