DVP Théorème d'Hadamard Levy

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 214, 220.
- Références :
  - Bernis.

Rappel 1 On admet pour la suite le théorème de CAUCHY-LIPSHITZ à paramètre.

Théorème 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On a équivalence entre :

1. L'application f est un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$,
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}_x f$ est inversible et f est coercive $\left(\text{i.e. } \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty\right)$.

Preuve.

— Montrons 1. $\Longrightarrow$ 2. : Supposons donc 1.. Puisque $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{D}_{f(x)} f^{-1} \circ \mathrm{D}_x f = id_{\mathbb{R}^n}$$

Ainsi, $\mathrm{D}_x f$ est inversible à gauche donc inversible, car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, d'inverse $\mathrm{D}_{f(x)} f^{-1}$.
Soit $R \in \mathbb{R}^+$. L'image réciproque de $\overline{B(0,R)}$ par f est égale à l'image de $\overline{B(0,R)}$ par f^{-1} qui est continue. C'est donc un compact, car $\overline{B(0,R)}$ est compact, car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. Il existe donc $A(R) \in \mathbb{R}^+$ tel que $f\left(\overline{B(0,R)}\right) \subset \overline{B(0,A)}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| > A \Longrightarrow \|f(x)\| > R$$

Cela permet bien de prouver la coercivité de f.

— Montrons 2. $\Longrightarrow$ 1. : Supposons donc 2.. Quitte à remplacer f par $f - f(0)$, on peut supposer $f(0) = 0$.
On commence à montrer l'existence d'un inverse à droite pour f par la méthode des chemins. Construisons $s : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle ouvert contenant $[0,1]$, tel que

$$\forall (t,x) \in \times \mathbb{R}^n,\ f \circ s(t,x) = tx \tag{1}$$

Alors $s(1,\cdot)$ sera un inverse à droite de f.
Soit I un tel intervalle et $s : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application dérivable par rapport à la première variable. Une dérivation par rapport à t, on a (1) si et seulement si

$$\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n\ \mathrm{D}_{s(t,x)} f \circ \partial_t s(t,x) = x \text{ et } f \circ s(0,x) = 0$$

si et seulement si

$$\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n\ \partial_t s(t,x) = \left(\mathrm{D}_{s(t,x)} f\right)^{-1} \cdot x \text{ et } s(0,x) \in f^{-1}(\{0\})$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $s(\cdot,x)$ est solution sur l'intervalle I du problème de CAUCHY :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (D_y f)^{-1} \cdot x \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

alors s vérifie (1).

On définit
$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (\mathrm{D}_y f)^{-1} \cdot x \end{pmatrix}$$
Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composition des applications $\mathcal{C}^1$:

— $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x,y) & \longmapsto & x \text{ ou } y \end{pmatrix}$ qui est linéaire en dimension finie, donc $\mathcal{C}^1$,

— $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ y & \longmapsto & \mathrm{D}_y f \end{pmatrix}$ bien définie et $\mathcal{C}^1$ car $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,

— $\begin{pmatrix} \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}^n) \\ \ell & \longmapsto & \ell^{-1} \end{pmatrix}$ qui est bien $\mathcal{C}^1$,

— $\begin{pmatrix} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\ell, x) & \longmapsto & \ell(x) \end{pmatrix}$ continue car bilinéaire en dimension finie.

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x, \cdot)$ est $\mathcal{C}^1$, donc par le théorème de CAUCHY, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution de maximale de (2), notée $s(\cdot, x)$, définie sur un intervalle ouvert $\left]t^-(x), t^+(x)\right[$ contenant 0. Montrons que $t^+(x) > 1$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $t^+(x_0) < \sup(I) \in \overline{\mathbb{R}}$. Par le principe de sortie de tout compact, on a : $\lim\limits_{t \to t^+(x_0)} \|s(t, x_0)\| = +\infty$, donc, par coercivité de f, on a $\lim\limits_{t \to t^+(x_0)} \|f \circ s(t, x_0)\| = +\infty$. Or,
$$\lim_{t \to t^+(x_0)} \|f \circ s(t, x_0)\| = \lim_{t \to t^+(x_0)} \|t x_0\| = t^+(x_0)\|x_0\| < +\infty$$
Ce qui est absurde. Donc $1 < t^+(x_0) = \sup(I) \in \overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, on peut définir $s_1 = s(1, \cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$, et on a bien
$$f \circ s_1 = id_{\mathbb{R}^n}$$
Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de CAUCHY-LIPSHITZ à paramètre assure que la restriction de s à $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$. En particulier, s_1 est donc $\mathcal{C}^1$.

Il reste à montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. En effet, on aura alors f de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, donc $s_1 = f^{-1}$ car s_1 est un inverse à droite de f. s_1 étant également de classe $\mathcal{C}^1$, f sera bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

— On a $f \circ s_1 = id_{\mathbb{R}^n}$, donc f est bien surjective.

— Pour montrer l'injectivité de f, il suffit de montrer la surjectivité de s_1.

En effet, soient y_1, y_2 tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Si s_1 est surjective, alors il existe x_1, x_2 tels que $s(x_i) = y_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a alors :
$$x_1 = f \circ s_1(x_1) = f(y_1) = f(y_2) = f \circ s_1(x_2) = x_2$$
, et donc $y_1 = s(x_1) = s(x_2) = y_2$, donc f est bien injective dans ce cas.

Montrons donc que $s(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, par un argument de connexité.

- $s_1(\mathbb{R}^n)$ est non vide car s_1 est bien définie sur $\mathbb{R}^n$.
- Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $(s_1(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Par continuité de f, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} f\circ s_1(x_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = f(y)$, donc par continuité de de s_1, $y = s_1(f(y))$. Ainsi, $s_1(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
- Soit $y \in s_1(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $s_1(x) = y$. Comme $\mathrm{D}_y f$ est inversible, par le théorème d'inversion locale, il existe U voisinage ouvert de y, V voisinage ouvert de x tels que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Par continuité de s_1, il existe $V' \subseteq V$ voisinage ouvert de x tel que $s_1(V') \subseteq U$. On a alors :

  $$s_1(V') = f\big|_U^{V\,-1}\left(f\big|_U^V(s_1(V'))\right) = f\big|_U^{V\,-1}(V')$$

  avec $f\big|_U^{V\,-1}(V')$ ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Ainsi, $s_1(V')$ est un ouvert de $s_1(\mathbb{R}^n)$ contenant y, donc $s_1(\mathbb{R}^n)$ est ouvert car voisinage de tous ses points.

$s_1(\mathbb{R}^n)$ est donc ouvert, fermé et non vide, donc $s_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ par connexité de $\mathbb{R}^n$, donc s_1 est bien surjective, ce qui termine la preuve.

$\square$