Théorème de BRAUER

Antoine DEQUAY

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçon : 101, 105, 108, 152.
- Références :
 - Lettre de Kovacs à Curtis : <https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/1C77E48050F6DCC5D49525FEAD1D3D97/S1446788716000835a.pdf/the-permut.pdf>,
 - http://agregmaths.free.fr/doc/docs_nicolas/developpement%20Algebre/Thm%20de%20Brauer.pdf.
- Pour aller plus loin :
 - lien avec les représentants de groupe : <https://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Agreg.Brauer.pdf>

Notation Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ sa matrice de permutation associée. On a, avec $(e_i)_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket}$ de $V = \mathbb{K}^n$ la base canonique, $P_\sigma(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}$ (En particulier $P_\sigma \in GL_n$).

Théorème 1 Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, σ_1 et σ_2 sont conjuguées si et seulement si P_{σ_1} et P_{σ_2} sont conjuguées dans $GL_n(\mathbb{K})$, i.e. :

$$\exists \tau \in \mathfrak{S}_n, \sigma_2 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1} \iff \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}), P_{\sigma_2} = QP_{\sigma_1}Q^{-1}$$

Preuve.

— **Sens direct.**

Supposons σ_1 et σ_2 conjugués dans $\mathfrak{S}_n$. On peut vérifier que $u : \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ \sigma & \longrightarrow & P_\sigma \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupe. Ainsi, pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma_2 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}$, on a :

$$P_{\sigma_2} = P_\tau P_{\sigma_1} P_{\tau^{-1}} = P_\tau P_{\sigma_1} P_\tau^{-1}$$

Ainsi, P_{σ_1} et P_{σ_2} sont bien conjugués dans $GL_n(\mathbb{K})$.

— **Sens réciproque.**

Supposons qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P_{\sigma_2} = QP_{\sigma_1}Q^{-1}$. Montrons que σ_1 et σ_2 sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.

Notation Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $d_k(\sigma)$ le nombre de k -cycles intervenants dans la décomposition de σ est produit de cycles disjoints.

On cherche donc à prouver que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_k(\sigma_1) = d_k(\sigma_2)$.

Le morphisme de groupe u permet d'avoir :

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_{\sigma_2^m} = P_{\sigma_1^m} = (QP_{\sigma_1}Q^{-1})^m = QP_{\sigma_1}^m Q^{-1} = QP_{\sigma_1^m} Q^{-1}$$

Ainsi, $P_{\sigma_1^m}$ et $P_{\sigma_2^m}$ sont conjugués dans $GL_n(\mathbb{K})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On s'intéresse donc aux cycles de décomposition de σ_1^m et σ_2^m , et montrons que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n (k \wedge m) d_k(\sigma_1) = \sum_{i=1}^n (k \wedge m) d_k(\sigma_2)$$

Lemme 2 Soit ψ un k -cycle de $\mathfrak{S}_n$. Alors, pour $m \in \mathbb{N}$, ψ^m est le produit de $k \wedge m$ cycles à supports disjoints, tous de longueur $\frac{k}{k \wedge m}$.

Preuve. ψ est conjugué à $(1\ 2\ \dots\ k)$, donc il suffit de montrer le résultat pour cette permutation. Soit $x \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et soit, pour $m \in \mathbb{N}$, c_m le cycle contenant x de la décomposition en produit de cycles disjoints de $(1\ 2\ \dots\ k)$.

Pour prouver le résultat, il suffit de montrer que c_m est de longueur et donc d'ordre $\frac{k}{k \wedge m}$.

$(1\ 2\ \dots\ k)$ étant sans points fixes vu dans $\mathfrak{S}_k$, c_m est sans point fixe, vu comme une permutation de son support, et il vient, pour $i \in \mathbb{N}$:

$$c_m^i = Id \iff c_m^i(x) = x \iff (1\ 2\ \dots\ k)^{mi}(x) = x \iff (1\ 2\ \dots\ k)^{mi} = Id$$

$(1\ 2\ \dots\ k)$ étant d'ordre k , on a donc :

$$c_m^i = Id \iff k \mid mi \iff \frac{k}{k \wedge m} \mid i$$

Ainsi, $\text{ord}(c_m) = \frac{k}{k \wedge m}$, d'où le résultat. □

Ainsi, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le nombre de cycles à supports disjoints de σ^m , pour $m \in \mathbb{N}$, est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k \wedge m) d_k(\sigma_1) = \sum_{k=1}^n (k \wedge m) d_k(\sigma_1).$$

Soit $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in V$, on se donne l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur V suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n \times V & \longrightarrow & V \\ \left(\sigma, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) & \longrightarrow & \sum_{i=1}^n x_i e_{\sigma(i)} \end{array} \right)$$

Notation Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note : $V^\sigma = \{v \in V, \sigma \cdot v = \sigma(v) = v\} = \text{Fix}(\sigma)$.

Lemme 3 $\dim_{\mathbb{K}}(V^\sigma)$ est le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints, en tenant compte des cycles de longueur 1.

Preuve. On a :

$$v \in V^\sigma \iff \sigma(v) = v \iff \sum_{i=1}^n v_i e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n v_{\sigma^{-1}(i)} e_i = \sum_{i=1}^n v_i e_i$$

Par unicité de l'écriture dans la base canonique, on a donc :

$$v \in V^\sigma \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_i = v_{\sigma^{-1}(i)} \iff (\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \text{orb}(i) = \text{orb}(j) \implies v_i = v_j)$$

Ainsi, en notant $(\omega_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ les orbites de l'action de $\langle \sigma \rangle$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, un élément de V s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=1}^r \left(\alpha_i \sum_{j \in \Omega_i} e_j \right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \omega_i,$$

donc $(\omega_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ est une famille génératrice de V^σ . Cette famille est également libre, par liberté de la base canonique, donc $\dim(V^\sigma) = r$, qui est le nombre d'orbites de l'action de $\langle \sigma \rangle$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, donc exactement le nombre de cycles à supports disjoints dans la décomposition de σ . $\square$

On a donc :

$$\dim_{\mathbb{K}}(V^{\sigma^m}) = \sum_{k=1}^n (k \wedge m) d_k(\sigma)$$

Montrons que, à $m \in \mathbb{N}$ fixé, $\dim_{\mathbb{K}}(V^{\sigma_1^m}) = \dim_{\mathbb{K}}(V^{\sigma_2^m})$.

On considère $u_Q : \begin{pmatrix} V & \longrightarrow & V \\ v & \longrightarrow & Qv \end{pmatrix}$. Montrons que u_Q induit un isomorphisme entre $V^{\sigma_1^m}$ et $V^{\sigma_2^m}$. On a :

$$\begin{aligned} v \in V^{\sigma_1^m} &\iff \sigma_1^m(v) = v \iff P_{\sigma_1^m}(v) = v \\ &\iff P_{\sigma_2^m}Q(v) = Q(v) \iff Q^{-1}P_{\sigma_2^m}(Qv) = Qv \iff Qv \in V^{\sigma_2^m} \end{aligned}$$

Ainsi, comme Q est inversible, u_Q induit bien un isomorphisme entre $V^{\sigma_1^m}$ et $V^{\sigma_2^m}$.

On a donc :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \dim_{\mathbb{K}}(V^{\sigma_1^m}) = \dim_{\mathbb{K}}(V^{\sigma_2^m}) = \sum_{k=1}^n (k \wedge m) d_k(\sigma_1) = \sum_{k=1}^n (k \wedge m) d_k(\sigma_2)$$

Notation Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note introduit le vecteur colonne suivant : $C(\sigma) = (d_k(\sigma))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, et $A = (i \wedge j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.

Par ce qui précède, on a $AC(\sigma_1) = AC(\sigma_2)$. Il ne reste plus qu'à prouver que A est inversible pour prouver le résultat.

Lemme 4 $\det(A) = \varphi(1) \dots \varphi(n) \neq 0$ avec φ l'indicatrice d'EULER. Donc A est inversible.

Preuve. Par propriété de la fonction d'EULER, on a, pour

$$(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \wedge j = \sum_{d|i \wedge j} \varphi(d) = \sum_{d|i \text{ et } d|j} \varphi(d)$$

Comme tous les nombres considérés sont dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on peut écrire $i \wedge j = \sum_{i=1}^n r_{i,k} s_{k,j}$, où :

$$r_{i,k} = \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } k|i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } s_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k|j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En notant $R = (r_{i,k})_{(i,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $S = (s_{k,j})_{(k,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$, on a $A = RS$ avec R triangulaire inférieure et S triangulaire supérieure. On a donc :

$$\det(A) = \det(R)\det(S) = \prod_{k=1}^n \varphi(k) \times \prod_{k=1}^n 1 = \prod_{k=1}^n \varphi(k) \neq 0$$

□
□