Théorème de Nash

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 203, 223, 241.
- Références :
  - Le Barbenchon.

Théorème 1 (de Brouwer) Toute application continue d'un compact convexe de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même admet un point fixe.

Notation Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(m_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in (\mathbb{N}^*)^n$. Un jeu à n joueurs est représenté par des ensembles de stratégies convexes compacts $S_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ et par des fonctions d'utilité continues $u_i : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $i \in [\![1,n]\!]$, où $\mathbb{S} = \prod_{i=1}^{n} S_i$.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $x = (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{S}$, on note $\tilde{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \prod_{j\neq i} S_j$, et on définit la fonction d'utilité partielle :

$$u_i^{\tilde{x}_i} : \begin{pmatrix} S_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

On appelle équilibre de Nash un point $x \in \mathbb{S}$ qui vérifie :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], u_i(x) = \max_{x\in S_i} u_i^{\tilde{x}_i}(x)$$

Théorème 2 On suppose que : $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall \tilde{x}_i \in \prod_{j\neq i} S_j, u_i^{\tilde{x}_i}(x)$ est concave. Alors le jeu admet un équilibre de Nash.

Preuve. On suppose dans un premier temps les fonctions strictement concaves.

Lemme 3

$$\forall i \in [\![1,n]\!], b_i : \begin{pmatrix} \prod_{j\neq i} S_j & \longrightarrow & S_i \\ \tilde{x}_i & \longmapsto & \operatorname{argmax}\left(u_i^{\tilde{x}_i}\right) \end{pmatrix}$$

est bien définie et continue.

Preuve. Soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $\tilde{x}_i \in \prod_{j\neq i} S_j$. $u_i^{\tilde{x}_i}$ est continue sur S_i compact, donc admet bien un maximum sur S_i. Il est unique par concavité stricte de $u_i^{\tilde{x}_i}$ sur S_i convexe. Ainsi, b_i est bien définie.

Montrons que b_i est continue. Soit $\left(\tilde{x}_i^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \left(\prod_{j\neq i} S_j\right)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\tilde{x}_i$. Montrons que $\left(b_i\left(\tilde{x}_i^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $b_i\left(\tilde{x}_i\right)$. La suite étant à valeurs dans S_i compact, il suffit de montrer qu'elle admet une unique valeur d'adhérence, qui est $b_i\left(\tilde{x}_i\right)$. Soit donc $z \in S_i$ une valeur d'adhérence de $\left(b_i\left(\tilde{x}_i^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice associée. Par définitions de b_i, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{S}$,

$$u_i^{\tilde{x}_i^{\phi(k)}}\left(b_i\left(\tilde{x}_i^{\phi(k)}\right)\right) \geq u_i^{\tilde{x}_i^{\phi(k)}}(y)$$

d'où, en passant à la limite, par continuité de u_i :

$$u_i^{\tilde{x}_i}(z) \geq u_i^{\tilde{x}_i}(y)$$

Ainsi, par définition de b_i, on a $z = b_i(\tilde{x}_i)$, ce qui prouve le résultat, et donc la continuité de b_i.

□

Par définition, $x \in \mathbb{S}$ est un équilibre de Nash si et seulement si x est point fixe de l'application $F : \begin{pmatrix} \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbb{S} \\ x & \longmapsto & (b_i(\tilde{x}_i))_{i\in[\![1,n]\!]} \end{pmatrix}$. Par continuité, pour $i \in [\![1,n]\!]$, de $x \longmapsto \tilde{x}_i$ et de b_i, F est bien continue. Comme $\mathbb{S}$ est une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n m_i}$ comme produit de tels ensembles, le théorème de Brouwer permet de conclure.

Supposons maintenant les $u_i^{\tilde{x}_i}$ simplement concaves. On va se ramener au cas de la stricte concavité en perturbant légèrement les fonctions considérées.

On considère donc la fonction strictement concave

$$\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} & \longmapsto & -\sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}$$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, et $\varepsilon > 0$, on pose $u_{i,\varepsilon} = u_i + \varepsilon\Phi$. $\mathbb{S}$ étant compact, Φ y est bornée, et on a donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sup_{\mathbb{S}} |u_{i,\varepsilon} - u_i| = \varepsilon \sup_{\mathbb{S}} |\Phi| < +\infty$$

Ainsi, pour toute suite strictement positive de limite nulle v_n et tout $i \in [\![1,n]\!]$, u_{i,v_n} converge uniformément vers u_i.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $i \in [\![1,n]\!]$, les $u_{i,\varepsilon}^{\tilde{x}}$ sont strictement concaves, donc le jeu définit à partir des $u_{i,\varepsilon}$ admet un équilibre de Nash $x(\varepsilon) = (x_i(\varepsilon))_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{S}$, par ce qui précède.

En particulier, $\left(x(k^{-1})\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ existe et admet une valeur d'adhérence, car à valeur dans $\mathbb{S}$ compact. Soit donc ψ une extractrice associée à $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une telle valeur d'adhérence. Montrons que c'est un équilibre de Nash pour le jeu considéré dans notre problème.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, montrons que x_i est la meilleure réponse du joueurs i pour $\tilde{x}_i$ fixé. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in S_i$, on a :

$$u_{i,\frac{1}{\psi(k)}}^{\widetilde{x\left(\frac{1}{\psi(k)}\right)}_i}(x) \leq u_{i,\frac{1}{\psi(k)}}^{\widetilde{x\left(\frac{1}{\psi(k)}\right)}_i}\left(x_i\left(\frac{1}{\psi(k)}\right)\right) \tag{1}$$

Lemme 4 Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite fonctions continues de $\mathbb{S}$ dans lui-même convergeant uniformément vers $f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{S}$ convergeant vers $x \in \mathbb{S}$. Alors

$$f_k(x_k) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $\|\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n m_i}$. f étant limite uniforme de fonctions continues, elle est continue, donc :

$$\exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{S}, \|x - y\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Par convergence uniforme des $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq k_1, \sup_{y\in\mathbb{S}} \|f(y) - f_k(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Par convergence des $(x_k)_{k\in}$, il existe $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq k_2, \|x_k - x\| \leq \eta$$

On a alors, pour tout $k \geq k_0 = \max(k_1, k_2)$,

$$\begin{aligned}\|f_k(x_k) - f(x)\| &\leq \|f_k(x_k) - f(x_k)\| + \|f(x_k) - f(x)\| \\ &\leq \sup_{y\in\mathbb{S}} \|f_k(x_k) - f(x_k)\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

On peut appliquer le lemme précédent aux $u_{i,\frac{1}{\phi(k)}}$ et à
$\left(x_1\left(\frac{1}{\phi(k)}\right), \ldots, x_{i-1}\left(\frac{1}{\phi(k)}\right), x, x_{i+1}\left(\frac{1}{\phi(k)}\right), \ldots, x_n\left(\frac{1}{\phi(k)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \left(\prod_{i=1}^n S_i\right)^{\mathbb{N}^*}$, d'où :

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} u_{i,\frac{1}{\psi(k)}}^{\widetilde{x\left(\frac{1}{\psi(k)}\right)}_i}(x) = u_i^{\tilde{x}_i}(x)$$

et à $\left(\left(x_i\left(\frac{1}{\phi(k)}\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \left(\prod_{i=1}^n S_i\right)^{\mathbb{N}^*}$, d'où :

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} u_{i,\frac{1}{\psi(k)}}^{\widetilde{x\left(\frac{1}{\psi(k)}\right)}_i}\left(x_i\left(\frac{1}{\psi(k)}\right)\right) = u_i^{\tilde{x}_i}(x_i)$$

Ainsi, en passant à la limite le k en (1), il vient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall x \in S_i, u_i^{\tilde{x}_i}(x) \leq u_i^{\tilde{x}_i}(x_i)$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est la meilleure réponse pour le joueur i face à la configuration $\tilde{x}_i$, ce qui montre bien que x est un équilibre de Nash.

□