# Théorème de compacité en logique propositionnelle

Antoine Dequay

21 septembre 2022

## Notes

- Prof : .
- Leçon : 203, 916, 918, 924.
- Références :
  - Queffélec, *Topologie*,
  - Cori & Lascar, *Logique mathématique*.

**Théorème 1** (TYCHONOFF) Soit $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques non vides, $X = \prod_{i\in I} X_i$. Alors $X$ est compact si et seulement si $X_i$ est compact pour tout $i \in I$.

*Preuve.*

- $\Rightarrow$ Par définition de la topologie produit, les projections canoniques $(p_i)_{i\in I} : X \to X_i$ sont continues, donc les $X_i$ sont compacts.
- $\Leftarrow$ On se restreint au cas $I$ dénombrable, la preuve dans le cas générale fait intervenir le lemme de ZORN (ce théorème est en fait équivalent à l'axiome du choix !)

  Soit $X_1, X_2$ deux espaces compacts. Montrons que $X = X_1 \times X_2$ est compact.

  Soit donc $(\omega_j)_{j\in J}$ un recouvrement de $X$. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in X$, il existe $j_x \in J$ tel que $x \in \omega_{j_x}$ et donc $V_x, W_x$ tels que $V_x \times W_x$ soit un voisinage de $x$ et inclus dans $\omega_{j_x}$. On se fixe de tels voisinages pour tout $x \in X$.

  On fixe $x_2 \in X_2$, et on s'intéresse à $X_1 \times \{x_2\}$. Comme $(V_x)_{x\in X_1\times\{x_2\}}$ est un recouvrement de $X_1$, il existe $K(x_2) \subset X$ fini, tel que $X_1 \subset \bigcup_{x\in K(x_2)} V_x$ (car $X_1$ est compact).

  On pose, pour $x_2 \in X_2$, $A_{x_2} = \bigcap_{x\in K(x_2)} W_x$. On peut maintenant faire varier $x_2$, et on remarque que $(A_{x_2})_{x_2\in X_2}$ est un recouvrement de $X_2$ (car $x_2 \in X_2$). On peut donc trouver (parce que $X_2$ est compact) $L \subset X_2$, fini, tel que $X_2 \subset \bigcup_{x_2\in L} A_{x_2}$.

  Il reste à poser $K = \bigcup_{x_2\in L} K(x_2) \subset X$, qui est fini. Alors, par construction,

  $$X \subset \bigcup_{x\in K} V_x \times W_x.$$

  En effet, si $a = (a_1, a_2) \in X$, il existe $x_2 \in L$ tel que $a_2 \in A_{x_2}$, puis $x \in K(x_2)$ tel que $a_1 \in V_x$. Donc $a_2 \in W_x$, $x \in K$ et on a bien $a \in V_x \times W_x$.
  Le cas $\#I > 2$ se traite par récurrence immédiate grâce à ce que l'on vient de prouver.

$\square$

**Théorème 2** Tout ensemble $\mathcal{F}$ de formules de la logique propositionnelle est satisfiable si et seulement si il est finiment satisfiable (c'est à dire que tout sous-ensemble fini de $\mathcal{F}$ est satisfiable).

*Preuve.* On va montrer l'équivalence contraposée :

Tout ensemble $\mathcal{F}$ de formules de la logique propositionnelle est contradictoire si et seulement si il est finiment contradictoire (c'est à dire qu'il existe une sous-ensemble fini de $\mathcal{F}$ contradictoire).

Le sens réciproque est évident, montrons le sens direct.

On munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète et on note $P$ l'ensemble des variables (propositionnelles) associées à $\mathcal{F}$. Pour $F \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(F) := \left\{\delta \in \{0,1\}^P;\ \overline{\delta}(F) = 1\right\}$.

Si on note $A_1, \dots, A_n \in P$ l'ensemble des variables propositionnelles intervenant dans la définitions de $F$, on remarque que :

$$\Delta(F) = \bigcup_{\substack{(\varepsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in\{0,1\}^n \\ F(\varepsilon_i)=1}} \left\{\delta \in \{0,1\}^P;\ \delta(A_1) = \varepsilon_1,\ \dots,\ \delta(A_n) = \varepsilon_n\right\},$$

car la valeur de $F$ ne dépend que des variables qui interviennent dans sa définition.

Ainsi, $\Delta(F)$ est l'union finie (au plus $2^n$ éléments) d'ouverts élémentaires de $\{0,1\}^P$. C'est donc un ouvert, donc un fermé.

Supposons $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ contradictoire. On a donc $\bigcap_{i\in I} \Delta(F_i) = \emptyset$, donc on peut en extraire un ensemble $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i\in J} \Delta(F_i) = \emptyset$ [1], car $\{0,1\}^P$ est compact par TYCHONOFF. Ainsi, $\{F_i\}_{i\in J} \subset \mathcal{F}$ est contradictoire et finie, d'où le résultat.

$\square$

1. passer par le complémentaire