Théorie des ordres denses

Antoine DEQUAY

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Ocan SANKUR.
- Leçon : 914, 918, 924.
- Références :
  - Introduction à la logique, DAVID.

Définition 1 *Élimination des quantificateurs.* Une théorie T admet l'élimination des quantificateurs si, pour toute formule close F, il existe une formule close G sans quantificateurs telle que $T \models F \leftrightarrow G$

Lemme 2 Pour qu'une théorie T admette l'élimination des quantificateurs, il faut et il suffit que pour toute formule sans quantificateur $F[x, x_1, \dots, x_n]$, il existe une formule $G[x_1, \dots, x_n]$ sans quantificateur telle que $T \models \forall x_1, \dots, \forall x_n, \{\exists x F \leftrightarrow G\}$.

Preuve. *(idée)* Pour F une formule close de T, on peut se ramener à une écriture de F n'utilisant que les connecteurs $\exists$, $\vee$ et $\neg$. Une récurrence immédiate sur la taille de F permet alors de montrer qu'il existe une formule G sans quantificateur telle que $VL(G) \subset VL(F)$ (où VL désigne les variables libres) et $T \models F \leftrightarrow G$ (le seul cas pouvant "poser problème" est la rencontre d'un "$\exists$", ce qui est réglé par l'hypothèse du lemme). □

Définition 3 *Théorie des ordres denses.* La théorie des ordres denses T_0 est la théorie écrite sur le langage $\mathcal{L}_0 = \{<, =\}$ constituée des formules suivantes :

- O_1 : $\forall x, \forall y, \neg\{x < y \wedge y < x\}$,
- O_2 : $\forall x, \forall y, \forall z, \{x < y \wedge y < z \to x < z\}$ (ordres stricts),
- O_3 : $\forall x, \forall y, \{x < y \vee x = y \vee y < x\}$ (totaux),
- O_4 : $\forall x, \forall y, \exists z, \{x < y \to x < z \wedge z < y\}$ (denses),
- O_5 : $\forall x, \exists y, \{x < y\}$ (sans plus petit élément),
- O_6 : $\forall x, \exists y, \{x > y\}$ (sans plus grand élément).

Proposition 4

1. T_0 est non contradictoire,
2. Les modèles de T_0 sont infinis,
3. T_0 possède des modèles non isomorphes.

Preuve.

1. $(\mathbb{R}, <)$ est un modèle de T_0,
2. Tout ensemble fini totalement ordonné admet un plus grand élément, donc la finitude d'un modèle de T entrerait en contradiction avec la formule O_5.
3. $(\mathbb{Q}, >)$ est un modèle de T_0 non isomorphe à $\mathbb{R}$.

□

Théorème 5 La théorie T_0 admet l'élimination des quantificateurs.

Preuve. Pour prouver ce fait, on utilise le lemme 2.

Comme $T_0 \models \neg(x = y) \leftrightarrow x < y \vee y < x$ et $T_0 \models \neg(x < y) \leftrightarrow x = y \vee y < x$, une formule sans quantificateurs $F[x, x_1, \ldots, x_n]$ est équivalente dans T_0 à une forme normale disjonctive $\bigvee_k \bigwedge_l H_{k,l}$ où les $H_{k,l}$ sont des formules atomiques d'une des formes suivante :

$$x = x,\ x = x_i,\ x_i = x_j,\ x_i < x,\ x < x_i,\ x_i < x_j,\ x < x,\ \bot,\ \top$$

On peut éliminer $x = x,\ x_i = x_i,\ x_i < x_i$ et $x < x$ qui sont équivalentes à $\top$ ou $\bot$. De plus, on élimine $\top$ et $\bot$, car $\models \bot \wedge A \leftrightarrow \bot$ et $\models \top \wedge A \leftrightarrow A$.

Enfin, comme $\models \exists x(A \vee B) \leftrightarrow \exists x A \vee \exists x B$, on se ramène à montrer le résultat pour une formule de la forme $\exists x \underbrace{\bigwedge_k E_k}_{=:K}$, avec les E_k dans (avec $i \neq j$) :

$$x = x_i,\ x_i = x_j,\ x_i < x,\ x < x_i,\ x_i < x_j$$

— Si il existe k tel que $E_k \equiv x = x_i$, alors $\models \exists x K \leftrightarrow K[x := x_i]$,

— Sinon, on a :

$$\exists x K \leftrightarrow K_1 \wedge \exists x K_2$$

où $K_1 = \bigwedge_n K_{1,n}$ et $K_2 = \bigwedge_m K_{2,n}$, avec les $K_{1,n}$ des formules atomiques de la forme $x_i = x_k$ ou $x_i < x_j$, $i \neq j$ et les $K_{2,n}$ des formules atomiques de la forme $x_i < x$ ou $x < x_i$. Il est clair que la formule $\exists x K_2$ est équivalente à

$$\exists x \left(\left(\bigwedge_{i \in I} x_i < x \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in J} x < x_j \right) \right)$$

On a alors deux cas de figures :

— $I \cap J \neq \emptyset$: Alors $\exists x K_2$ est équivalente à $\bot$,

— Sinon,

— si $I \neq \emptyset$ et $J \neq \emptyset$, $\exists x K_2$ est équivalente à $\bigwedge_{i \in I, j \in J} x_i < x_j$ par transitivité et densité de l'ordre,

— Si au moins l'un des deux ensemble est vide, par O_5 ou O_6, $\exists x K_2$ est équivalente à $\top$.

Tous les cas de figures ont été traités, ce qui permet de conclure !

□

Corollaire 6 La théorie T_0 est complète et décidable.

Preuve. Pour F une formule close, il existe G une formule close sans quantificateurs telle que $T_0 \models F \leftrightarrow G$. G est donc une combinaison booléenne de formules atomiques closes. Pour prouver le résultat, il suffit donc de vérifier que, pour toute combinaison booléenne B de formules atomiques, on a $T \models B$ ou $T \models \neg B$, ce qui se vérifie par récurrence immédiate sur la taille de B.

Comme T est complète, récursive, et que son langage est au plus dénombrable (car fini), T est bien décidable (il suffit d'énumérer toutes les démonstrations utilisant T comme axiome). Alors, pour F une formule close, l'une de ces démonstration sera une démonstration pour $T \models F$ ou $T \models \neg F$, ce qui revient à $T \not\models F$.

$\square$