DVP Échantillonage de Shannon

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 208, 250.
- Références :
  - Analyse harmonique réelle , Willem.

Définition 1 BL^2. On note

$$BL^2 := \left\{u \in L^2(\mathbb{R}),\, \widehat{u}|_{\mathbb{R}\setminus I} = 0 \text{ p.p.}\right\}$$

avec $I := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On le muni du produit scalaire usuel $\langle u|\, v\rangle := \int_{\mathbb{R}} u\overline{v}$.

Théorème 2

1. BL^2 est complet,
2. Théorème d'échantillonage : $U : \begin{pmatrix} BL^2 & \longrightarrow & l^2(\mathbb{Z}) \\ u & \longmapsto & (u(k))_{k\in\mathbb{Z}} \end{pmatrix}$ est une isométrie.

Preuve.

1. Il suffit de prouver que BL^2 est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$, qui est complet. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de BL^2 convergeant vers $u \in L^2(\mathbb{R})$. Montrons que $u \in BL^2$. Par continuité de la transformée de Fourier dans L^2, $\widehat{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\mathbb{R})} \widehat{u}$, donc $\widehat{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}\setminus I)} \widehat{u}$. Par définition de BL^2, il vient $\widehat{u}|_{\mathbb{R}\setminus I} = 0$, d'où le résultat.
2. **Lemme 3** Soit $u \in BL^2$, alors $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2$.

   Preuve. On a $\widehat{u} \in L^2(I) \subset L^1(I)$. De plus, $\widehat{u}$ s'annule sur $\mathbb{R}\setminus I$, donc $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R})$, et on a, par transformation inverse de fourier :

   $$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi) e^{2\imath\pi x\xi} d\xi = \int_I \widehat{u}(\xi) e^{2\imath\pi x\xi} d\xi.$$

   Ainsi, $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, et, par Cauchy-Schwartz et Plancherel :

   $$|u(x)| \leq \|\widehat{u}\|_{L^2(I)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

   □

   Définition 4 sinc. On définit :

   $$\text{sinc} : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{pmatrix}.$$

   Lemme 5 $(\tau_k \,\text{sinc})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2.

   Preuve. On pose $e_k : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{2\imath\pi kx} & \text{si } |x| \leq 12 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}$. On a :

   $$\widehat{e_k}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e_k(x) e^{-2\imath\pi x\xi} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\imath\pi(k-\xi)x} dx = \tau_k \,\text{sinc}\,.$$

Donc $\widehat{\tau_k \operatorname{sinc}} = e_k(-\cdot)$ et $\tau_k \operatorname{sinc} \in BL^2$. De plus, par conservation du produit scalaire,

$$\int_{\mathbb{R}} \tau_k \operatorname{sinc} \tau_j \operatorname{sinc} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\tau_k \operatorname{sinc}} \tau_j \operatorname{sinc} = \int_{\mathbb{R}} \overline{e_k} e_j = \delta_{k,j},$$

car $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Il reste à voir que la famille est totale. Soit $u \in BL^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \overline{\tau_k \operatorname{sinc}}\, u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{e_k} u = \int_I e_k \widehat{u}.$$

Ainsi, $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ étant totale, $\widehat{u}|_I = 0$, donc $\widehat{u} = 0$, donc $u = 0$, d'où le résultat.

$\square$

Ainsi, pour $u \in BL^2$, on a $u \overset{L^2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u | \tau_k \operatorname{sinc}\rangle \tau_k \operatorname{sinc}$.

Par le lemme 3, la convergence est uniforme, et on a donc

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u | \tau_k \operatorname{sinc}\rangle \operatorname{sinc}(x-k)$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = j \in \mathbb{Z}$, il vient $u(j) = \langle u | \tau_j \operatorname{sinc}\rangle$, d'où le caractère isomorphe de l'application.

On a enfin $\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|^2$ par ce qui précède, d'où le caractère isométrique.

$\square$