DVP Équivalence de sémantique

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Alan Schmitt.
- Leçon : 930.
- Référence :
  - Le Barbenchon.

Théorème 1 La sémantique (opérationnelle) à grands pas est équivalente à la sémantique (opérationnelle) à petits pas.

Preuve. On veut montrer que pour toute instruction S et tous états s, s', on a :

$$\langle S, s\rangle \to s' \iff \langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'.$$

Lemme 2 Pour toutes instructions S_1, S_2 et tous états s, s' tels que $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$, on a $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$.

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre de pas :

HR_k : "Pour tout S_1, S_2, s, s', si $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$, alors $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$."

— Pour $k = 1$, ok car $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$, et par $\texttt{comp}^2_{pp}$, on a $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle$, d'où le résultat.

— Pour l'hérédité (on suppose HR_k, ...), on note $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s''\rangle \Rightarrow^k s'$. L'hypothèse de récurrence et $\texttt{comp}^1_{pp}$ permettent de la récurrence.

La propriété étant vraie sur $\mathbb{Z}$, on a bien le résultat attendu.

□

Sens direct : On procède par induction sur la structure de l'arbre de dérivation.

— $\texttt{skip}_{gp}$: OK car les règles sont les mêmes en grand pas et petit pas, donc possèdent la même sémantique.

— $\texttt{aff}_{gp}$: OK car les règles sont les mêmes en grand pas et petit pas, donc possèdent la même sémantique.

— $\texttt{comp}_{gp}$: On suppose qu'on a $\langle S_1; S_2, s\rangle \to s'$ et s'' comme dans $\texttt{comp}_{gp}$. Par hypothèse d'induction sur les prémisses, on a $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s''$ et $\langle S_2, s''\rangle \Rightarrow^* s''$. Par le lemme, on a bien $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s''\rangle \Rightarrow^* s'$.

— $\texttt{if}^{\bowtie}_{gp}$ ($\bowtie \in \{\bot, \top\}$) : On suppose qu'on a $\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_\top\ \texttt{else}\ S_\bot, s\rangle \to s'$, obtenu à partir de $\texttt{if}^{\bowtie}_{gp}$. On a donc $\langle S_{\bowtie}, s\rangle \to s'$ pour $\mathcal{B}[\![b]\!]_s = \bowtie$. Par hypothèse d'induction, on a $\langle S_{\bowtie}, s\rangle \Rightarrow^* s'$. Par $\texttt{if}^{\bowtie}_{pp}$, on peut conclure.

— $\texttt{while}^{\top}_{gp}$: On suppose que $\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s''$ est obtenu à partir de $\texttt{while}^{\top}_{gp}$. Par hypothèse d'induction sur les prémisses, on a donc $\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'$ et $\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s'\rangle \Rightarrow^* s''$. Par $\texttt{while}_{pp}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle &\Rightarrow \langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ (S; \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S)\ \texttt{else}\ \texttt{skip}, s\rangle \\
&\Rightarrow \langle S; \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \ \text{ car } \mathcal{B}[\![b]\!]_s = \top, \\
&\Rightarrow^* \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s'\rangle \ \text{ par le lemme,} \\
&\Rightarrow^* s''
\end{aligned}$$

- $\texttt{while}_{gp}^{\perp}$: On procède de même en utilisant la règle $\texttt{skip}_{pp}$ (pas de prémisses à prendre en compte).

Lemme 3 Pour toutes instructions S_1, S_2, tous états s, s' et tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, si $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s'$ alors il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $k_1 + k_2 = k$, $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s''$ et $\langle S_2, s''\rangle \Rightarrow^{k_2} s'$.

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre de pas.

- Si $k = 2$, par définition de la règle de composition $\texttt{comp}^2$, on a forcément le résultat avec $k_1 = k_2 = 1$.
- Pour $k > 2$:
  - Si la dérivation s'écrit $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s''\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$ avec $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s''$, on a directement le résultat avec $k_1 = 1$,
  - Sinon, $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s''\rangle \Rightarrow^{k-1} s'$ avec $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s''\rangle$, on peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour $k-1$ et recombiner pour conclure.

□

Sens indirect : On procède par récurrence forte sur le nombre de pas :

HR_k : "Pour tout S, s, s', si $\langle S, s\rangle \Rightarrow^k s'$, alors $\langle S, s\rangle \to s'$".

- Pour $k = 1$, les seuls cas possibles sont `skip` et `aff`. On a déjà vu que les sémantiques étaient les mêmes, d'où le résultat.
- Pour $k > 1$, on distingue les différents cas selon la forme de l'instruction S :
  - `comp` : Si S est de la forme $S_1; S_2$, i.e. $\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s'$, on peut appliquer le lemme, puis l'hypothèse de récurrence sur $k_1, k_2 < k$. On a donc bien $\langle S_1, s\rangle \to s''$ et $\langle S_2, s''\rangle \to s'$, d'où le résultat attendu par application de $\texttt{comp}_{gp}$.
  - `if` : Si S est de la forme $\texttt{if } b \texttt{ then } S_\top \texttt{ else } S_\perp$, pour $\bowtie \in \{\top, \perp\}$, si $\mathcal{B}[\![b]\!]_s = \bowtie$, alors, par $\texttt{if}_{pp}^{\bowtie}$, on a $\langle \texttt{if } b \texttt{ then } S_\top \texttt{ else } S_\perp, s\rangle \Rightarrow \langle S_\bowtie, s\rangle \underset{\text{par hypothèse}}{\Rightarrow^{k-1}} s'$. Par hypothèse de récurrence sur $k-1$ et par $\texttt{if}_{gp}^{\bowtie}$, on peut conclure.
  - `while` : Si S est de la forme $\texttt{while } b \texttt{ do } S$, i.e. $\langle \texttt{while } b \texttt{ do } S, s\rangle \Rightarrow^k s'$, alors la dérivation commence nécessairement par

$$\langle \texttt{while } b \texttt{ do } S, s\rangle \Rightarrow \langle \texttt{if } b \texttt{ then } (S; \texttt{while } b \texttt{ do } S) \texttt{ else skip}, s\rangle$$

    d'après $\texttt{while}_{pp}$.

    - Si $\mathcal{B}[\![b]\!]_s = \top$, par $\texttt{if}_{pp}^{\top}$, on a

$$\langle \texttt{while } b \texttt{ do } S, s\rangle \Rightarrow^2 \langle S; \texttt{while } b \texttt{ do } S, s\rangle \Rightarrow^{k-2} s'$$

      On peut alors appliquer successivement le lemme puis l'hypothèse de récurrence sur $k_1, k_2 < k-2 < k$. On peut alors conclure grâce à $\texttt{while}_{gp}^{\top}$.

— Si $\mathcal{B}[\![b]\!]_s = \bot$, par $\mathtt{if}^{\bot}_{pp}$, on a

$$\langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S, s\rangle \Rightarrow^2 \langle \mathtt{skip}, s\rangle \Rightarrow s'$$

On a donc $s = s'$ (par déterminisme). On peut enfin conclure par $\mathtt{while}^{\bot}_{gp}$.

□