DVP Étude de $\mathcal{O}(p, q)$

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Leçons : 106, 156, 158, 170.
- Références :
  - H2G2.

Définition 1 $\mathcal{O}(p,q)$. On note $\mathcal{O}(p,q)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ représentée dans la base canonique par $I_{(p,q)} = \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_q \end{pmatrix}$ où $p+q=n$.

Notation On note $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$.

Théorème 2 Soit $p, q \neq 0$. Alors il existe un homéomorphisme :

$$\mathcal{O}(p,q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

Preuve.

Lemme 3 $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Preuve. Pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on peut trouver $P \in \mathcal{O}(n)$ tel que $S = P\,\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}$. Alors $\exp(S) = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_i})P^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par stricte positivité de l'exponentiel. Donc exp est bien définie et continue.

Pour $B = Q\,\mathrm{diag}(\mu_i)Q^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\exp(Q\,\mathrm{diag}(\ln \mu_i)Q^{-1}) = B$, d'où la surjectivité.

Supposons $\exp(A) = \exp(A')$. On note P le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $P(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. Alors A' commute avec $P(\exp(A')) = P(\exp(A)) = A$. Par diagonalisation simultanée, il vient $A = A'$, donc exp est injective donc bijective.

Montrons la **bicontinuité**. Soit $B_p = \exp(A_p) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ convergeant vers $B = \exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons que $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$. Comme B_p converge, $|||B_p|||_2$ est bornée, tout comme $|||B_p^{-1}|||_2$ par continuité de l'inverse et car $B_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} B^{-1}$ qui est bien inversible. Pour $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a :

$$|||M|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^tMM\right)} = \sqrt{\rho\left(M^2\right)} = \rho(M) = \max\left(\mathrm{Spec}(M)\right)$$

Ainsi, les spectres des B_p sont bornés, donc inclus dans un compact $K = [C', C] \subset]0, +\infty[$, donc les spectres des A_p sont inclus dans un compact $[\ln C', \ln C]$ de $\mathbb{R}$.

Ainsi, A_p est bornée en norme $|||\cdot|||_2$. Soit $\overline{A}$ une valeur d'adhérence de la suite et φ une extractrice associée. On a $B_{\varphi(p)} = \exp\left(A_{\varphi(p)}\right)$ donc il vient $\exp \overline{A} = B = \exp A$, donc, par injectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il vient $\overline{A} = A$. Ainsi, A_p est une suite bornée n'admettant qu'une valeur d'adhérence en dimension finie, donc elle converge vers A, ce qui achève la preuve.

□

Montrons que $\mathcal{O}(p,q)$ est stable par transposition :

$$M \in \mathcal{O}(p,q) \Longrightarrow MI_{(p,q)}{}^tM = I_{(p,q)} \Longrightarrow {}^tM^{-1}I_{(p,q)}M^{-1} = I_{(p,q)} \Longrightarrow {}^tM^{-1} \in \mathcal{O}(p,q) \Longrightarrow {}^tM \in \mathcal{O}(p,q)$$

Soit $M \in \mathcal{O}(p,q) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $O \in \mathcal{O}(n)$, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sa décomposition polaire ($M = OS$), **montrons que** $S, O \in \mathcal{O}(p,q)$.

Avec $T = {}^tMM$, on a $S^2 = T \in \mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par stabilité de $\mathcal{O}(p,q)$ par transposition et car $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a donc accès, par le lemme, à $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $T = \exp(U)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
T \in \mathcal{O}(p,q) &\iff TI_{(p,q)}{}^tT = I_{(p,q)} \iff {}^t\exp(U) = I_{(p,q)}\exp(U)I_{(p,q)}^{-1} = \exp\left(-I_{(p,q)}UI_{(p,q)}^{-1}\right) \\
&\iff {}^tU = U = -I_{(p,q)}UI_{(p,q)}^{-1} \text{ par bijectivité de } \exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\
&\iff \frac{{}^tU}{2}I_{(p,q)} + I_{(p,q)}\frac{U}{2} = 0 \iff \frac{{}^tU}{2} = -I_{(p,q)}\frac{U}{2}I_{(p,q)}^{-1} \\
&\iff {}^t\exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{(p,q)}\exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1} I_{(p,q)}^{-1} \iff \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in \mathcal{O}(p,q)
\end{aligned}$$

Or, $\exp\left(\frac{U}{2}\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\exp\left(\frac{U}{2}\right)^2 = \exp(U) = T$. Donc $S = \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in \mathcal{O}(p,q)$. Ainsi, $O = MS^{-1} \in \mathcal{O}(p,q)$ et on a accès à une bijection bicontinue :

$$\mathcal{O}(p,q) \cong (\mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{O}(n)) \times \left(\mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)$$

Étude de $\mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{O}(n)$: Pour $O \in \mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{O}(n)$, un découpage par blocs donne :

$$\begin{aligned}
O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(p,q) \iff \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \overbrace{{}^tAA - {}^tBB}^{=I_p} & \overbrace{{}^tAC - {}^tBD}^{=0} \\ \underbrace{{}^tCA - {}^tDB}_{=0} & \underbrace{{}^tCC - {}^tDD}_{=-I_q} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Et

$$O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n) \iff \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{{}^tAA - {}^tBB}^{=I_p} & \overbrace{{}^tAC - {}^tBD}^{=0} \\ \underbrace{{}^tCA - {}^tDB}_{=0} & \underbrace{{}^tCC - {}^tDD}_{=I_q} \end{pmatrix}$$

Il vient ${}^tBB = 0$, donc $\mathrm{tr}({}^tBB) = 0 = \sum_{i,j} b_{i,j}^2$ donc $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} = 0$. De même, $C = 0$ et il vient $A \in \mathcal{O}(p)$ et $D \in \mathcal{O}(q)$. Donc

$$\mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{O}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},\ A \in \mathcal{O}(p),\ D \in \mathcal{O}(q) \right\} \cong \mathcal{O}(p) \times \mathcal{O}(q)$$

Étude de $\mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n{++}(\mathbb{R})$: On a vu dans le jeu d'équivalences :

$$\exp : L := \left\{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ UI_{(p,q)} + I_{(p,q)}U = 0\right\} \longrightarrow \mathcal{O}(p,q)$$

De plus, comme $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, on a a accès à un homéomorphisme :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap L \cong \mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Enfin, pour $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec A et D symétriques, on a :

$$U \in L \Longleftrightarrow UI_{(p,q)} + I_{(p,q)}U = \begin{pmatrix} 2A & -B+B \\ {}^tB - {}^tB & -2D \end{pmatrix} = 0$$

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap L \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \right\} \cong \mathbb{R}^{pq}$, d'où l'homéomorphisme :

$$\mathcal{O}(p,q) \cong \mathcal{O}(p) \times \mathcal{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

□

Corollaire 4

1. $\mathcal{O}(p,q)$ est compact si et seulement si $pq = 0$,
2. Si $pq \neq 0$, $\mathcal{O}(p,q)$ admet 4 composantes connexes (via det),
3. La composante connexe de l'identité est :$\mathrm{SO}_0(p,q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(p,q),\ A \in \mathrm{GL}_p^+(\mathbb{R}) \right\}$.

Preuve. Les deux premiers points sont évidents, cf H2G2 pour le troisième.

□

Remarque Lire théorème de Sylvester et suite p.180 H2G2 tome 1.