μ-récursive implique λ-définissable

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Lilian Besson.
- Leçon : 912, 929.
- Références :
  - Barbenchon.

Théorème 1 Toute fonction μ-récursive est λ-définissable.

Preuve. On note Λ l'ensemble des fonctions λ-définissables.

Rappel 2 On représente les entiers (de Barendregt) par : $[\![0]\!] := \lambda x.x$ et $[\![n+1]\!] := \langle F, [\![n]\!]\rangle$, avec $F := \lambda xy.y$, $T := \lambda xy.x$ et $\langle M, N\rangle := \lambda x.xMN$

Rappel 3 Une fonction $\chi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ est dite λ-définissable si et seulement si il existe un λ-terme X tel que :

$$\forall n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N},\ X[\![n_1]\!] \dots [\![n_p]\!] \sim_\beta [\![\chi(n_1, \dots, n_p)]\!].$$

On dit alors que X représente χ.

On va montrer que Λ contient des fonctions représentant les fonctions de base des fonctions μ-récursive, est stable par composition, récursion primitive et minimisation non-bornée.

- Fonction zéro : $\lambda x.[\![0]\!]$,
- Succ : $\lambda x.\langle F, x\rangle$;
  En effet, on a $\lambda x.\langle F, x\rangle\, [\![n]\!] \to_\beta \langle F, [\![n]\!]\rangle = [\![n+1]\!]$.
- π_i^n :

$$\begin{aligned}\lambda x_1 \dots x_n.x_i t_1 \dots t_n &\to_\beta \lambda x_1 \dots x_n.x_i t_1 \dots t_n \\ &\to_\beta \lambda x_2 \dots x_n.x_i t_2 \dots t_n \\ &\to_\beta \lambda x_i \dots x_n.x_i t_i \dots t_n \\ &\to_\beta \lambda x_{i+1} \dots x_n.t_i t_{i+1} \dots t_n \\ &\to_\beta \lambda x_n.t_i t_n \to_\beta t_i\end{aligned}$$

- Pour $\chi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$, $\psi_1, \dots, \psi_p : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ représentées par $X, G_1, \dots, G_p$. Alors, pour $\overrightarrow{n} \in \mathbb{N}^k$, on a :

$$[\![\chi(\psi_1(\overrightarrow{n}), \dots, \psi_p(\overrightarrow{n}))]\!] \sim_\beta X[\![\psi_1(\overrightarrow{n})]\!] \dots [\![\psi_p(\overrightarrow{n})]\!] \sim_\beta X(G_1[\![\overrightarrow{n}]\!]) \dots (G_p[\![\overrightarrow{n}]\!]),$$

  Donc $\lambda\overrightarrow{x}.X(G_1\overrightarrow{x}) \dots (G_p\overrightarrow{x})$ représente $\chi(\psi_1, \dots, \psi_p)$.
- Soit $\psi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ et $\phi : \mathbb{N}^{p+2} \to \mathbb{N}$, X, G associés et φ définie, pour $\overrightarrow{n} \in \mathbb{N}^p$, par :

$$\varphi(\overrightarrow{n}, 0) = \chi(\overrightarrow{n}),\ \varphi(\overrightarrow{n}, k) = \psi(\overrightarrow{n}, k, \varphi(\overrightarrow{n}, k-1)).$$

  On cherche M tel que

$$M\overrightarrow{x}k \sim_\beta \text{ if (is\_zero } k\text{) then } X\overrightarrow{x} \text{ else } G\overrightarrow{x}k(M\overrightarrow{x}(\text{pred } k))$$

avec

$$\text{if then else} := \lambda xtf.xtf,$$

$$\text{is\_zero} := \lambda x.(xT),$$

$$\text{pred} := \lambda x.(xF).$$

Soit θ un combinateur de point fixe ($\theta K \sim_\beta K(\theta K)$) et

$$H := \lambda h\overrightarrow{x}k.\ \text{if (is\_zero } k\text{) then } X\overrightarrow{x} \text{ else } G\overrightarrow{x}k(h\overrightarrow{x}(\text{pred } k))$$

Alors θH représente φ. En effet, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on pose HR_k :

$$\forall \overrightarrow{n} \in \mathbb{N}^p,\ [\![\varphi(\overrightarrow{n}, k)]\!] \sim_\beta \theta H[\![\overrightarrow{n}]\!][\![k]\!].$$

— Pour $k = 0$, on a :

$$\theta H[\![\overrightarrow{n}]\!][\![0]\!] \sim_\beta H(\theta H)[\![\overrightarrow{n}]\!][\![0]\!] \sim_\beta X[\![\overrightarrow{n}]\!] \sim_\beta [\![\chi(\overrightarrow{n})]\!] \sim_\beta [\![\varphi(\overrightarrow{n}, 0)]\!].$$

— Pour l'hérédité en $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\theta H[\![\overrightarrow{n}]\!][\![k]\!] &\sim_\beta H(\theta H)[\![\overrightarrow{n}]\!][\![k]\!] \\ &\sim_\beta G[\![\overrightarrow{n}]\!][\![k]\!](\theta H[\![\overrightarrow{n}]\!](\text{pred } [\![k]\!])) \\ &\sim_\beta G[\![\overrightarrow{n}]\!][\![k]\!](\theta H[\![\overrightarrow{n}]\!][\![k-1]\!]) \\ &\sim_\beta G[\![\overrightarrow{n}]\!][\![k]\!][\![\varphi(\overrightarrow{n}, k-1)]\!] \\ &\sim_\beta [\![\psi(\overrightarrow{n}, k, \varphi(\overrightarrow{n}, k-1)]\!] \sim_\beta [\![\psi(\overrightarrow{n}, k)]\!].\end{aligned}$$

— Soit $\chi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$, X associé et φ tel que pour tout $\overrightarrow{n} \in \mathbb{N}^p$, on ait :

$$\varphi(\overrightarrow{n}) := \mu_k(\chi(\overrightarrow{n}, k) = 0).$$

On cherche donc un λ-terme qui fait un test sur le prédicat $\chi(\overrightarrow{n}, k) = 0$, qui renvoie k si le test est valide et qui recommence avec $k + 1$ sinon.
On peut représenter $\chi(\overrightarrow{n}, k) = 0$ par le λ-terme $P := \lambda k.(\text{is\_zero}(X\overrightarrow{n}k))$. On pose

$$H := \lambda hk.\ \text{if } (Pk) \text{ then } k \text{ else } h(\text{succ } k).$$

Montrons que, avec θ un combinateur de point fixe, $\lambda\overrightarrow{x}.(\theta H[\![0]\!])$, où H dépend de $\overrightarrow{x}$ via P. On fixe $\overrightarrow{n} \in \mathbb{N}^p$, et on suppose que $\chi(\overrightarrow{n}, k) = 0$ est réalisé pour la première fois par $m \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\theta H[\![0]\!] \sim_\beta H(\theta H)[\![0]\!] &\sim_\beta \text{ if } (P[\![0]\!]) \text{ then } [\![0]\!] \text{ else } \theta H(\text{succ } [\![0]\!]) \\ &\sim_\beta \theta H(\text{succ } [\![0]\!]) \sim_\beta \theta H[\![1]\!] \sim_\beta H(\theta H)[\![1]\!] \\ &\cdots \sim_\beta \text{ if } (P[\![m]\!]) \text{ then } [\![m]\!] \text{ else } \theta H[\![m+1]\!] \\ &\sim_\beta [\![m]\!].\end{aligned}$$

D'où le résultat !

$\square$