106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Antoine Dequay

21 septembre 2022

Notes

- Prof : .
- Références :
  - NH2G2, *Tome 1 & 2*,
  - Perrin,
  - Gourdon, *Algèbre*,
  - Mneimné, *Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes*,
  - Rombaldi.

Table des matières

1 Le groupe linéaire

Cf ROMBALDI, PERRIN *et* GOURDON.

1.1 Définitions

⇝ Définition inversibilité,

⇝ Groupe linéaire, caractérisation,

⇝ inversibilité matrices, bijection avec les matrices ($GL_n(\mathbb{K})$),

⇝ Matrices de permutation, théorème de Cayley, corollaire : tout groupe fini de cardinale n s'injecte dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Déterminant et $SL(E)$

⇝ Def déterminant et $SL(E)$ via suite exacte, propriétés de $SL(E)$.

2 Etude de $GL(E)$

2.1 Sous-groupes remarquables

Cf ROMBALDI *et* H2G2.

⇝ Centre, sous-groupe dérivé, groupes unitaire, orthogonal, propriétés générales

⇝ (**[DEV]**) Morphismes continus du cercle dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2.2 Générateurs

Cf ROMBALDI *et* PERRIN.

⇝ Transvection, dilatation, ...

2.3 Actions remarquables

⇝ Action par translation,

⇝ Action par conjugaison et théorème du rang, (**[DEV]**) Théorème de BRAUER,

⇝ Action par congruence, théorème de SYLVESTER.

3 Influence du corps de base

3.1 Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Cf Mneimné *et* H2G2.

$\rightsquigarrow$ Densité, connexité, compacité,

$\rightsquigarrow$ **[DEV]** Décomposition polaire (est un $\mathcal{C}^{\infty}$-difféomorphisme),

$\rightsquigarrow$ Homéomorphie de l'exponentielle,

$\rightsquigarrow$ (**[DEV]**) pour groupe orthogonal : Étude de $\mathcal{O}(p, q)$.

3.2 Cas des corps finis

Cf Rombaldi *et* Perrin.

$\rightsquigarrow$ **[DEV]** pour groupe orthogonal : Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathcal{F}_q)$.