

# 126 : Exemples d'équations en arithmétique.

Antoine DEQUAY

21 septembre 2022

## Notes

- Prof : .
- Références :
  - PERRIN,
  - ISENMANN,
  - H2G2, *tome 2*,
  - HINDRY,
  - ROMBALDI,
  - SERRE,
  - SAUX-PICARD RANNOU,
  - DUVERNEY,
  - COMBES,
  - ROUDIER.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Équation diophantiennes linéaires</b>	<b>1</b>
1.1	Première approche . . . . .	1
1.2	Système d'équations de degré 1 . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Équation diophantiennes non-linéaires</b>	<b>1</b>
2.1	Approche de l'équation de FERMAT . . . . .	1
2.2	Représentation des entiers par des formes quadratiques . . . . .	1

<b>3</b>	<b>Utilisation de structures</b>	<b>1</b>
3.1	Théorème des deux carrés et entiers de GAUSS . . . . .	1
3.2	Équations de PELL-FERMAT et groupe sur une hyperbole . . . . .	1
<b>4</b>	<b>Cas des corps finis</b>	<b>2</b>
4.1	Equations modulaires . . . . .	2
4.2	Résidus quadratiques . . . . .	2

# 1 Équation diophantiennes linéaires

## 1.1 Première approche

*Cf* COMBES *et* ROMBALDI.

↪ Def, premiers exemples,

↪ Théorème de MATIASEVITCH en réponse au 10<sup>ème</sup> problème de HILBERT : Les ensemble diophantiens sont les ensembles récursivement énumérables. (admis)

↪ Par le problème de l'arrêt, il existe des ensemble récursivement énumérables indécidables, donc il n'y a pas de méthode générale pour résoudre une équation diophantienne.

## 1.2 Système d'équations de degré 1

*Cf* ROUDIER.

↪ Forme normale de SMITH, permet de résoudre un système!

# 2 Équation diophantiennes non-linéaires

*Cf* DUVERNEY.

## 2.1 Approche de l'équation de FERMAT

+ *Cf* COMBES.

## 2.2 Représentation des entiers par des formes quadratiques

# 3 Utilisation de structures

## 3.1 Théorème des deux carrés et entiers de GAUSS

*Cf* PERRIN *et* ISENMANN.

↪ [DEV] Théorème des deux carrés de FERMAT par les entiers de GAUSS.

## 3.2 Équations de PELL-FERMAT et groupe sur une hyperbole

*Cf* H2H2 *et* HINDRY.

↪ [DEV] Équation de PELL-FERMAT.

## 4 Cas des corps finis

### 4.1 Equations modulaires

*Cf* ROMBALDI.

↪ Commencer par version générale dans un anneau quelconque.

### 4.2 Résidus quadratiques

*Cf* SERRE, PERRIN *et* SAUX-PICARD RANNOU ?

↪ Symbole de Legendre, propriétés, réciprocity quadratique,

↪ Remarques : Par MATIASEVITCH, on peut décrire l'ensemble des nombres premiers par un système d'équations diophantiennes, et on n'a pas de méthode pour les énumérer, mais... ([DEV] Primalité des nombres de MERSENNE).