

924 : Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

Antoine DEQUAY & Julien DURON

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Sophie PINCHINAT.
- Références :
 - DNR, *Introduction à la logique*,
 - CORI-LASCAR, *Logique mathématique, tome 2*,
 - ROUGEMONT, *Logique et fondements de l'informatique*.

Table des matières

1	Généralités	1
1.1	Syntaxe	1
1.2	Modèle	1
1.3	Théorie	1
2	Liens entre syntaxe et sémantique	1
3	Conséquences	1
3.1	Théorie vide	1
3.2	Arithmétique	2
3.3	Un outil supplémentaire : l'élimination des quantificateurs	2

1 Généralités

1.1 Syntaxe

- ↪ Langage des formules du 1er ordre, formule atomique,
- ↪ Grammaire des termes et des formules du 1er ordre,
- ↪ Prop : non-amiguïté.

1.2 Modèle

- ↪ Définition structure, environnement, évaluation, valuation, modèle d'une formule, validité, modèle d'un ensemble de formules, conséquence.

1.3 Théorie

- ↪ Théorie,
- ↪ Exemple : théorie des groupes,
- ↪ cohérente/contradictoire, complète.

2 Liens entre syntaxe et sémantique

- ↪ Théorème de complétude,
- ↪ Cor : Théorème de compacité,
- ↪ Pas de formule pour les modèles finis ("non-axiomatisable"), pour la connexité d'un graphe...
- ↪ Cor : Théorème de LÖWENHEIM-SKOLEM, paradoxe de SKOLEM : il existe un modèle dénombrable de ZFC qui contient des ensembles indénombrables.
- ↪ Il existe des groupes de tout cardinal infini, ...

3 Conséquences

3.1 Théorie vide

- ↪ Théorie récursive, décidable,
- ↪ ([DEV]) CHURCH : indécidabilité de la théorie vide s'il existe un prédicat binaire et deux symboles de fonctions unaires. (i.e. indécidabilité de la validité au premier ordre).

3.2 Arithmétique

- ↪ PRESBURGER,
- ↪ ([DEV]) Décidabilité de l'arithmétique de PRESBURGER.
- ↪ PEANO,
- ↪ Il existe des modèles non-standards de l'arithmétique de PEANO (L-S),
- ↪ Si T contient PEANO et est consistante, elle est indécidable (admis).
- ↪ récursive + complète \rightarrow décidable,
- ↪ GÖDEL : Si T contient PEANO, est consistante et récursive, elle est incomplète.

3.3 Un outil supplémentaire : l'élimination des quantificateurs

Cf. DNR.

- ↪ def, thm, conséquences, ...
- ↪ [DEV] Théorie des ordres denses. (complétude et décidabilité)