229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Antoine Dequay & Juliette Veuillez

21 septembre 2022

Notes

- Prof : Zied Ammari.
- Références :
  - Gourdon, *Analyse.*
  - Ramis, *Cours de mathématiques spéciales, topologie et éléments d'analyse (tome 3).*
  - Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle,*
  - Beck, *Objectif agrégation,*
  - Brezis, *Analyse fonctionnelle,*
  - Sauvageot, *J'ai jamais rien compris aux maths mais ça je comprends.*

Table des matières

1 Fonctions monotones

1.1 Définitions et premières propriétés

Cf. Ramis + *VB*.

$\rightsquigarrow$ Def,

$\rightsquigarrow$ Def équivalentes VB.

Définition 1 $VB(\mathbb{R}, E)$. Soit $E \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, on appelle $VB(\mathbb{R}, E)$ l'ensemble des fonctions à variation bornée, i.e. l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \longrightarrow E$ telles que

$$T_u : x \longmapsto \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} |u(x_j) - u(x_{j-1})|, N \in \mathbb{N}^*, -\infty < x_0 < \cdots < x_N = x \right\}$$

soit bornée. Dans ce cas, on note $VT(u) := \sup_{x \in \mathbb{R}} T_u(x)$.

Lemme 2 Si $u \in VB(\mathbb{R}; E)$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x < y) \Longrightarrow |u(y) - u(x)| \leq T_u(y) - T_u(x)$$

Théorème 3

$$VB(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, u = u_1 - u_2, \text{ avec } u_1 \text{ et } u_2 \text{ croissantes bornées}\}$$

Corollaire 4 $VB(I, \mathbb{R})$ est engendré par $\mathcal{M}(I)$.

1.2 Régularité

1.2.1 Continuité et monotonie

Cf. Ramis *et* Rombaldi.

$\rightsquigarrow$ limites, points de discontinuité.

1.2.2 Dérivabilité et monotonie

Cf. Ramis *et* *VB*.

$\rightsquigarrow$ Accroissements finis, équivalence mono et signes dérivations,

$\rightsquigarrow$ héritage pour VB.

Corollaire 5 Si $u \in VB(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, alors :

- u est bornée,
- u admet une limite à gauche en tout point de $]-\infty,+\infty]$ et une limite à droite en tout point de $[-\infty,+\infty[$,
- u est continue sauf sur un ensemble au plus dénombrable,
- u est mesurable et localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.3 Application : suites et séries de fonctions

Cf. Gourdon.

1.3.1 Suite récurrente

$\rightsquigarrow$ Sens variation suites.

1.3.2 Second théorème de Dini

1.3.3 Comparaison série-intégrale

2 Fonctions convexes

Cf. Rombaldi.

2.1 Définitions et premières propriétés

$\rightsquigarrow$ Def, on se ramène sur $\mathbb{R}$.

2.2 Caractérisation

$\rightsquigarrow$ Première carac, cas dériv, géné dans $\mathbb{R}^n$, cas 2 fois dériv.

2.3 Régularité

$\rightsquigarrow$ Lipshitzien, cont, inég avec dérivées.

3 Applications de la convexité

3.1 Inégalités de convexité

Cf. Rombaldi, Sauvageot *et* Brezis.

- ⇝ Inégalité moyennes (ROMBALDI, dessin SAUVAGEOT,
- ⇝ HÖLDER, MINKOVSKY pour norme sur L^p dans BREZIS.

3.2 Application en probabilité

Cf. APPEL.

- ⇝ **[DEV]** GALTON-WATSON.

3.3 Recherche de minimum

Cf. ROMBALDI *et* BECK.

- ⇝ minimum local -> global,
- ⇝ Minimisation fonction quadratique BECK,
- ⇝ (**[DEV]**) Méthode du gradient à pas optimal,
- ⇝ **[DEV]** Ellipsoïde de JOHN-LOEWNER.