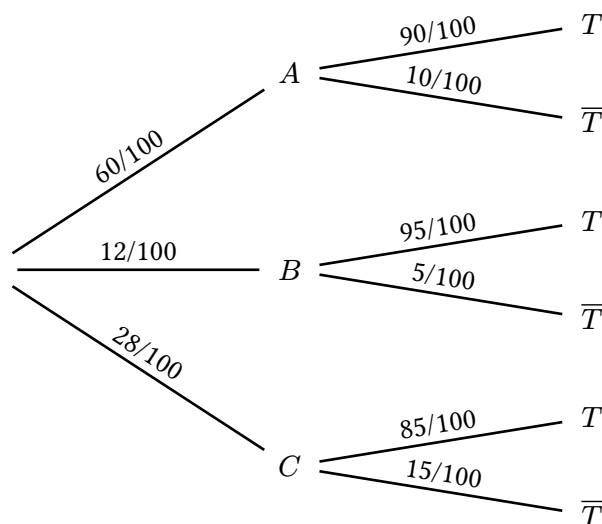


Correction 26-MATJ1G11

Exercice 1

Partie A

1.



2. On a $\mathbb{P}(A \cap \bar{T}) = \frac{60}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{6}{100}$. Cela signifie que le contrôle a 6% de chance de tomber sur une lame du fournisseur A non-conforme.

3. D'après la formule des probabilités totales, on a $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(A \cap T) + \mathbb{P}(B \cap T) + \mathbb{P}(C \cap T) = \frac{60}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{12}{100} \times \frac{95}{100} + \frac{28}{100} \times \frac{85}{100} = 0,54 + 0,114 + 0,238 = 0,892$.

4. On cherche $\mathbb{P}_{\bar{T}}(B)$. D'après la formule de Bayes, on a $\mathbb{P}_{\bar{T}}(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(\bar{T})}{\mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\frac{12}{100} \times \frac{5}{100}}{1 - 0,892} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{108}{1000}} = \frac{6}{108} \approx 0,056$.

Partie B

1. La loi binomiale correspond au tirage de 75 lames avec remise, chaque lame ayant une probabilité de 0,108 d'être non-conforme. Comme X représente le nombre de lames non-conformes, on a $X \sim B(75, 0,108)$.

2. On a $\mathbb{P}(\{X = 6\}) = \binom{75}{6} \times 0,108^6 \times (1 - 0,108)^{75-6} \approx 0,120$.

3. On a :

$$\mathbb{P}(\{X > 8\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq 8\})$$

$$\left(= 1 - \sum_{k=0}^8 \binom{75}{k} \times 0,108^k \times (1 - 0,108)^{75-k} \right) \\ \approx 0,422 < 50\%$$

Ainsi, l'équipementier a bien raison.

Partie C

1. Pour l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}(X_i)}{n} && \text{par linéarité de l'espérance,} \\
&= \frac{n}{n} \times \mathbb{E}(X) && \text{car pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \sim X, \\
&= 75 \times 0,108 = 8,1 && \text{car } X \sim B(75, 0,108), \\
&&& \text{et que } \mathbb{E}(Y) = Np \text{ pour } Y \sim B(N, p).
\end{aligned}$$

Pour la variance, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(M_n) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{V}(X_i)}{n^2} && \text{car les variables sont indépendantes,} \\
&= \frac{n}{n^2} \times \mathbb{V}(X) && \text{car pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \sim X \sim B(75, 0,108) \\
&= \frac{1}{n} \times 75 \times 0,108 \times (1 - 0,108) = \frac{7,2252}{n} && \text{car } \mathbb{V}(Y) = Np(1-p) \text{ pour } Y \sim B(N, p).
\end{aligned}$$

2. Comme M_n admet une variance, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On a :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geq 2) \leq \frac{\mathbb{V}(M_n)}{2^2},$$

soit bien :

$$\mathbb{P}(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{7,2252}{n} \times \frac{1}{4} = \frac{1,8063}{n}.$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95 &\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq 1 - 0,05 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq 0,05
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, on a $\mathbb{P}(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}$. On cherche à résoudre :

$$\begin{aligned}
\frac{1,8063}{n} \leq 0,05 &\Leftrightarrow n \geq \frac{1,8063}{0,05} \\
&\Leftrightarrow n \geq 36,126.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 37$, on a $\mathbb{P}(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95$.

Cela signifie que la probabilité que le nombre moyen de lames non-conformes soit dans $\llbracket 6, 1; 10, 1 \rrbracket$ est supérieure ou égale à 95% dès qu'on fait au moins 37 compétitions.

Exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4e^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ est une fonction dérivable comme somme de telles fonctions, on a alors $f'(x) = -4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x)$. Ainsi, on a :

$$f'(x) + f(x) = -4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x) + 4e^{-x} + \cos(x) + \sin(x) = 2 \cos(x).$$

La fonction f est donc bien solution de l'équation (E), et l'affirmation est **VRAIE**.

2. On pose $h = g - f$, qui est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de telles fonctions. On cherche à résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = 0$. On a :

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = \cos(x) - 2.$$

Ainsi,

$$h'(x) > 0 \iff \cos(x) - 2 > 0 \iff \cos(x) > 2.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Ainsi, l'équation $\cos(x) > 2$ n'a pas de solution. On en déduit que $h'(x) < 0$ sur \mathbb{R} . Ainsi, h est strictement décroissante sur \mathbb{R} . De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = -\infty,$$

On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} . Ainsi, l'affirmation est **VRAIE**.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \frac{2n}{n+1} + \frac{\sin(n)}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} + \frac{\sin(n)}{n+1}$

• On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$. Ainsi, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$.

• On a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n+1} = 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Il vient donc $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2 + 0 = 2$. La suite converge, donc l'affirmation est **FAUSSE**.

4. On procède par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'hypothèse de récurrence $H(n) : "u_n = n^2"$.

• On a $u_1 = 1^2 = 1$, donc $H(1)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $H(n)$, et montrons $H(n+1)$. On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Ainsi, $H(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, on a donc $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, l'affirmation est **VRAIE**.

5. On remarque que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison e^{-1} et de premier terme $u_0 = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n e^{-k} = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{e(1 - e^{-(n+1)})}{e - 1} = \frac{e - e^{-n}}{e - 1}$.

Or, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e - 1}$. Ainsi, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers $\frac{e}{e - 1}$, donc l'affirmation est **VRAIE**.

Exercice 3

1. On a :

- $I \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right)$
- $J \left(0, \frac{1}{2}, 1 \right)$
- $K \left(0, 0, \frac{1}{2} \right)$

2. a. On a :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = 1.$$

b. On a $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AJ}\| \times \cos(\widehat{IAJ}) = 1$, donc :

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{IAJ}) &= \frac{1}{\|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AJ}\|} = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} \times \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}} \times \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

En appliquant la fonction arccos, on obtient $\widehat{IAJ} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,9^\circ$.

3. a. On a $\overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On peut calculer :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

et

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ainsi, \overrightarrow{KC} est orthogonal à \overrightarrow{AI} et à \overrightarrow{AJ} . On en déduit que \overrightarrow{KC} est bien orthogonal au plan (AIJ) , car les vecteurs \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{AJ} forment une base du plan (ils sont non colinéaires d'après la question précédente, l'angle \widehat{IAJ} étant non nul et différent de 180°).

- b. Le vecteur $\overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan (AIJ) . Ainsi, une équation du plan (AIJ) est de la forme $1 \times x + 1 \times y + \left(-\frac{1}{2}\right) \times z = d$, avec d à déterminer.

Comme le point $A(0, 0, 0)$ appartient au plan (AIJ) , on a $1 \times 0 + 1 \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 = d$, soit $d = 0$. Ainsi, $x + y - \frac{1}{2}z = 0$ est bien une équation du plan (AIJ) .

4. a. Comme $\overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (AIJ) , c'est un vecteur directeur de la droite (LC) .

Ainsi, comme $C(1, 1, 0)$ appartient à (LC) , une représentation paramétrique de la droite est, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$(KC) : \begin{cases} x = 1 + 1 \times t \\ y = 1 + 1 \times t \\ z = 0 + -\frac{1}{2} \times t \end{cases}$$

On cherche donc à résoudre le système suivant, correspondant à l'intersection de la droite (KC) et du plan (AIJ) :

$$\begin{cases} x + y - \frac{1}{2}z = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x + y - \frac{1}{2}z = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t + 1 + t - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t) = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{9}{4}t = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{8}{9} \\ x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{8}{9} \\ x = \frac{1}{9} \\ y = \frac{1}{9} \\ z = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Le point L a donc pour coordonnées $L\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right)$.

b. La distance du point C au plan (AIJ) est réalisée par la norme de \overrightarrow{LC} , par définition de L . Comme

$$\overrightarrow{LC} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{9} \\ 1 - \frac{1}{9} \\ 0 - \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}, \text{ on a :}$$

$$\|\overrightarrow{LC}\| = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{64}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{144}{81}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi, la distance du point C au plan (AIJ) vaut $\frac{4}{3}$.

5. a. Le vecteur $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ m - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$ étant un vecteur directeur de la droite (IM) , une représentation paramétrique de la droite (IM) est, pour $s \in \mathbb{R}$, en se basant sur les coordonnées de $I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$:

$$(IM) : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times s \\ y = 0 + m \times s \\ z = 1 + 0 \times s \end{cases}$$

On retrouve bien la représentation paramétrique donnée dans l'énoncé.

b. On rappelle qu'on a $\overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme ils n'ont pas les mêmes composantes non nulles, ils ne sont pas colinéaires. Ainsi, les deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes. On cherche donc à résoudre le système suivant, correspondant à l'intersection de la droite (KC) et de la droite (IM) :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \\ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \\ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ 1 + t = ms \\ -\frac{1}{2}t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ -1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ -1 = ms \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ s = -3 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Les droites (IM) et (KC) sont donc coplanaires si et seulement si $m = \frac{1}{3}$. L'affirmation est donc **FAUSSE**.

Exercice 4

Partie A

1. a. • On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
 • Par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

b. La courbe \mathcal{C}_f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

2. La fonction f étant dérivable sur $]0, +\infty[$, on a bien :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2\ln(x)x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

3. Pour $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) \geq 0 \iff 1 - 2\ln(x) \geq 0 \iff 2\ln(x) \leq 1 \iff \ln(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \leq e^{\frac{1}{2}}$ par stricte croissance de l'exponentielle et car $\frac{1}{x^3} > 0$ pour tout $x > 0$.

Ainsi, d'après la question 1, on a le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$1 - 2\ln(x)$	+	0	-
$\frac{1}{x^3}$	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2e}$	0

4. Un équation possible est $\Delta : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Comme $\ln(1) = 0$, il vient $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$. Ainsi, l'équation réduite est $\Delta : y = x - 1$.
5. La fonction f étant deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on a bien :

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \times x^3 - (1 - 2\ln(x)) \times 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2 \ln(x)}{x^6} = \frac{6\ln(x) - 5}{x^4}.$$

6. a. On regarde le signe de la dérivée seconde. Pour $x \in]0, +\infty[$, on a $f''(x) \geq 0 \iff 6\ln(x) - 5 \geq 0 \iff 6\ln(x) \geq 5 \iff \ln(x) \geq \frac{5}{6} \iff x \geq e^{\frac{5}{6}}$ par stricte croissance de l'exponentielle et car $\frac{1}{x^4} > 0$ pour

tout $x > 0$. Ainsi, la fonction f est concave sur $]0, e^{\frac{5}{6}}]$ et convexe sur $[e^{\frac{5}{6}}, +\infty[$. Comme $f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) = \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}$, l'unique point d'inflexion est donc $\left(e^{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}\right)$.

b. On a vu que sur l'intervalle $]0, e^{\frac{5}{6}}]$, la fonction f est concave. Ainsi, la courbe \mathcal{C}_f est située en-dessous de ses tangente, et c'est en particulier le cas pour la tangente en $x = 1$, car $0 \leq 1 \leq e^{\frac{5}{6}} \approx 2,3$. On a donc, pour $x \in]0, e^{\frac{5}{6}}]$, $x - 1 \geq f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

7. Par croissance de la fonction exponentielle, comme $1/2 < 5/6$, on a $e^{\frac{1}{2}} < e^{\frac{5}{6}}$. Ainsi, l'intervalle $[e^{\frac{5}{6}}, +\infty[$ est inclus dans l'intervalle $[e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$. D'après la question 3, sur cet intervalle, f est strictement décroissante, et $g(x) = x - 1$ y est strictement croissante. Ainsi, pour tout $x \in [e^{\frac{5}{6}}, +\infty[$, on a $f(x) < f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) = \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}} < g\left(e^{\frac{5}{6}}\right) = e^{\frac{5}{6}} - 1 < g(x)$ (la seconde inégalité vient de la question précédente). On a donc bien, pour tout $x \in [e^{\frac{5}{6}}, +\infty[$, $g(x) = x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2} = f(x)$.

On pouvait également poser $h(x) = x - 1 - f(x)$, étudier ses variations et ses bornes pour conclure que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Partie B

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, I_n correspond à l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f , entre $x = 1$ et $x = n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par la relation de Chasles : $I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^n f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

On a vu que $f(1) = 0$. D'après la question 3, f est strictement croissante sur $[1, e^{\frac{1}{2}}]$ et strictement décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$, avec 0 comme limite en $+\infty$. Ainsi, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $f(x) \geq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx \geq 0$, soit donc $I_{n+1} \geq I_n$. La suite est donc bien croissante.

3. La fonction f étant strictement décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$, elle l'est en particulier sur $[2, +\infty[$. Pour $i \in \llbracket 2, 9 \rrbracket$, le rectangle de base $\llbracket i, i + 1 \rrbracket$ est donc de hauteur $f(i)$:

```
from math import *
```

```
S = 1 / (2 * exp(1))
for i in range(2, 10):
    S = S + log(i) / (i ** 2)
print(S)
```

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \ln(x) \times \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \times \frac{-1}{x} dx && \text{par intégration par parties avec les fonctions } C^1 \text{ sur } [1, n] : \\ &= -\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(1)}{1} + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx && u(x) = \ln(x), v'(x) = \frac{1}{x^2}, \\ &= -\frac{\ln(n)}{n} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n && u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = -\frac{1}{x} \\ &= -\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{1} = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}. \end{aligned}$$

5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1 + \ln(n)}{n} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} \right).$$

Or, par croissances comparées, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(n)}{n} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} \right) = 1 - (0 + 0) = 1.$$