Correction exercices supplémentaires TD Théorie des groupes

Antoine Dequay, d'après le TD de Mercedes Haiech

21 septembre 2023

Table des matières

1 TD 2 **2**

1 TD 2

Exercice 1.1. Soit G un groupe qui possède exactement deux sous-groupes distincts de G et 1.

1. Montrer que G est un groupe fini en montrant d'abord que tous ses éléments sont d'ordre finis.
2. Montrer que G est cyclique.
3. En déduire que G est d'ordre pq ou p^3 avec $p \neq q$ deux nombres premiers.

Démonstration.

1. Montrons que tout élément de G est d'ordre fini. Soit $x \in G$. Supposons par l'absurde que x soit d'ordre infini. Alors le sous-groupe de G engendré par x est infini et isomorphe à $\mathbb{Z}$. Or $\mathbb{Z}$ possède une infinité de sous-groupes (les $n\mathbb{Z}$), donc G possède aussi une infinité de sous-groupes, ce qui est absurde. Donc x est d'ordre fini.

   Montrons maintenant que G est d'ordre fini. Supposons par l'absurde que G soit infini. Soit $x \neq 1$, on note $H = \langle x \rangle$. Alors H est fini, donc il n'est pas égal à G. Soit $y \notin H$. Alors $K = \langle y \rangle$ est un sous-groupe fini de G différent de G, H et $\{1\}$. Comme G est infini, on peut trouver un élément $z \notin H \cup K$. Le sous-groupe engendré par z est alors différent de G, H, K et $\{1\}$. Or c'est absurde car G possède exactement deux sous-groupes distincts de G et $\{1\}$. Donc G est fini.
2. Soit $x \neq 1$ un élément de G. On note H le sous-groupe engendré par x. On sait que $H \neq \{1\}$. Si $H = G$ alors on aura prouvé que G est cyclique. Sinon $H \neq G$ et il existe $y \in G \backslash H$. On note K le sous-groupe engendré par y. Comme précédemment $K \neq \{1\}$. De plus $K \neq H$. Si $K = G$ alors G est cyclique. Supposons que $K \neq G$. Alors il existe $z \notin H \cup K$. Le sous-groupe engendré par z n'est ni $\{1\}$, ni H ni K. C'est donc nécessairement G. Donc G est cyclique.
3. Comme G est un groupe cyclique, il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un certain entier $n > 1$. Or le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un sous-groupe d'ordre d pour tout d diviseur de n. Puisque le groupe G possède exactement deux sous-groupes distincts de G et 1, alors G est d'ordre pq ou p^3 avec $p \neq q$ deux nombres premiers.

$\square$