TD Théorie des groupes : exercices supplémentaires

Antoine Dequay, d'après le TD de Mercedes Haiech

24 novembre 2022

Table des matières

1 TD 1

Exercice 1.1. Soit X un ensemble de cardinal $|X| = 4$. Décrire toutes les lois de composition sur X qui en font un groupe.

Exercice 1.2. 1. L'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$?

2. Soit p un nombre premier. Montrer que $\{a + ib\sqrt{p} \mid (a, b) \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{C}, +)$ et que $\{a + ib\sqrt{p} \mid (a, b) \in \mathbf{Q}^\times\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{C}^\times, \cdot)$

Exercice 1.3. On considère l'ensemble $H = \{x + y\sqrt{3} \mid \ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1\}$.

1. Montrer que H est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soient u, v deux éléments de H. Montrer que leur produit uv (au sens du produit usuel sur $\mathbf{R}$) est dans H.
3. Soit u un élément de H, montrer que $\frac{1}{u}$ est dans H.
4. En déduire que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Exercice 1.4. Montrer en exhibant un exemple que la réunion de deux sous-groupes n'est en général pas un sous-groupe (on peut aussi montrer que si H et K sont deux sous-groupes d'un groupe G, alors $H \cup K$ est un sous-groupe si et seulement si $K \subset H$ ou $H \subset K$).

Exercice 1.5 (Groupe libre)**.** Soit X un ensemble. À tout élément x de X, on associe un symbole x^{-1}. Et l'on note X^{-1} l'ensemble des x^{-1} pour x parcourant x. On va construire un ensemble $G(X)$ de la manière suivante : un élément de $G(X)$ est un mot, c'est-à-dire une suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$ ne comprenant aucune séquence de deux termes consécutifs de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$ pour $x \in X$. On va ajouter une loi de composition interne sur $G(X)$. On multiplie deux éléments (ou mots) de $G(X)$ en les concaténant puis en le réduisant, c'est-à-dire en éliminant les séquences xx^{-1} ou $x^{-1}x$ que l'on rencontre. On va définir l'élément neutre de $G(X)$ comme étant le mot vide.

1. Montrer que $G(X)$ avec la loi ainsi définie est un groupe.
2. Soit $f\colon X \to G$ une application ensembliste, montrez que l'on peut définir un morphisme de groupe $\tilde{f} : G(X) \to G$ qui vérifie $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Exercice 1.6. Soit G un groupe. On appelle centre du groupe et l'on note $\mathcal{Z}(G) := \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$. Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe abélien de G et que si G possède un unique élément d'ordre deux, alors cet élément est dans $\mathcal{Z}(G)$.

Exercice 1.7. Soit

$$\Gamma := \{\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}^\times\}.$$

Montrer que Γ muni de la loi de multiplication pour les matrices est un groupe mais que ce n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{Gl}_2(\mathbf{R})$. Vérifier que Γ est isomorphe au groupe $(\mathbf{R}^\times, \cdot)$.

2 TD 2

Exercice 2.1. Soit G un groupe qui possède exactement deux sous-groupes distincts de G et 1.

1. Montrer que G est un groupe fini en montrant d'abord que tous ses éléments sont d'ordre finis.
2. Montrer que G est cyclique.
3. En déduire que G est d'ordre pq ou p^3 avec $p \neq q$ deux nombres premiers.

Exercice 2.2. Soient G et G' deux groupes. Soit morphisme de groupe $f\colon G \to G'$.

(a) On dit que f est un monomorphisme si pour tout groupe Γ, la propriété suivante est vérifiée : pour tous morphismes de groupes $u, v\colon \Gamma \to G$, si $f \circ u = f \circ v$ alors $u = v$.

(b) On dit que f est un épimorphisme si pour tout groupe Γ, la propriété suivante est vérifiée : pour tous morphismes de groupes $u, v\colon G' \to \Gamma$, si $u \circ f = v \circ f$ alors $u = v$.

Montrer les résultats suivant :

1. f est un morphisme injectif si et seulement si f est un monomorphisme
2. f est un morphisme surjectif si et seulement si f est un épimorphisme

3 TD 3

Exercice 3.1. Soit G un groupe tel que $\mathrm{Aut}(G)$ est cyclique.

1. Montrer que G est abélien.
2. Si G est fini, montrer que G est cyclique. On précisera alors les différentes possibilités pour l'ordre de G.

4 TD 4

Exercice 4.1. On se propose de calculer $\mathrm{Aut}(G)$ avec $G = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On note x un générateur de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et y un générateur de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Tout élément de G s'écrit donc $nx + my$ avec $0 \leqslant n \leqslant 3$ et $m = 0$ ou 1.

1. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\varphi(2x) = 2x$.
2. En envisageant les choix possibles pour $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$, justifier que $\mathrm{Aut}(G)$ est d'ordre 8.
3. On pose $\varphi(x) = 3x + y$ et $\varphi(y) = 2x + y$. Montrer que φ s'étend en un automorphisme d'ordre 4. De même, montrer que $\psi(x) = 3x + y$ et $\psi(y) = y$ définit un automorphisme d'ordre 2.
4. Vérifier que $\psi \circ \varphi \circ \psi = \varphi^{-1}$ et en déduire que $\mathrm{Aut}(G) \simeq D_4$.

Exercice 4.2. Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(D_4)$ est isomorphe à D_4 (on pourra étudier les choix possibles pour les images de r et s par un automorphisme). Préciser à quel sous-groupe correspond $\mathrm{Int}(D_4)$ dans cette description.

5 TD 5

Exercice 5.1. On veut montrer que le groupe $G := \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ des matrices entières de déterminant ± 1 est engendré par deux matrices :

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, nous introduisons le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et notons $\Gamma := \langle S, T \rangle$ le sous-groupe de G engendré par S et T.

1. Montrer que la formule
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$$
définit bien une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ sur $\mathbb{H}$. Quel est le noyau de cette action ?
2. Exprimer l'action de S, T, ST et TS sur $\mathbb{H}$ et préciser les ordres des transformations correspondantes.
3. On note $\mathcal{D}$ la partie de $\mathbb{H}$ suivante :
$$\mathcal{D} := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |\Re(z)| \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geqslant 1 \right\}.$$
Faire un dessin. Montrer que pour $z \in \mathbb{H}$ il existe $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\Gamma}$ tel que $g \cdot z \in \mathcal{D}$.
4. Soient $z \in \mathcal{D}$ et $g \in G$. Montrer que si $g \cdot z \in \mathcal{D}$ alors z est sur le bord de $\mathcal{D}$ et préciser la valeur de g (suivant la position de z).
5. Calculer les stabilisateurs de l'action de G pour un point de $\mathcal{D}$ (on prêtera une attention particulière aux cas $z = i$, $z = j$ et $z = -\bar{j}$).
6. Soit $z_0 = 2i$. Pour $g \in G$, on considère $z := g \cdot z_0$. D'après la question 3, il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \cdot z \in \mathcal{D}$. En utilisant la question précédente, montrer que $g = \gamma^{-1}$ et conclure.

Exercice 5.2. Soit $k < n$ deux entiers. On note E_k l'ensemble des parties à k éléments de $\{0, \cdots, n-1\}$. On rappelle que $\mathrm{Card}(E_k) = \mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dans toute la suite on suppose que k et n sont premiers entre eux.

1. On fait agir $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur E_k par $m * (a_1, \cdots, a_k) = (\overline{a_1 + m}, \cdots, \overline{a_k + m})$. Montrer que cela définit bien une action.
2. Montrer que le stabilisateur de tout élément est trivial.
3. En déduire que n divise C_n^k.

Exercice 5.3. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble fini X de manière transitive. (C'est-à-dire que pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$). On note $n = \mathrm{Card}(X)$.

1. Pour $k \leqslant n$, on note $X^{[k]} = \{(x_1, \cdots, x_k) \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$. Montrer que G agit naturellement sur $X^{[k]}$.
2. On dit que l'action de G sur X est k-transitive si l'action de G sur $X^{[k]}$ est transitive. Quel est le degré de transitivité de $\mathfrak{S}_n$ sur $X = \{1, \cdots, n\}$? Quel est celui de $\mathfrak{A}_n$?
3. Montrer que si G est k-transitif alors $|G| = n(n-1)\cdots(n-k+1)|\mathrm{Stab}(x_1, \cdots, x_k)|$.
4. On note $\chi(g) = \mathrm{Card}(\{x \in X \mid g \cdot x = x\})$ l'ensemble des points fixes de g dans son action dans X. Montrer que G est k-transitive si et seulement si
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)(\chi(g)-1)\cdots(\chi(g)-k+1) = 1$$
5. On suppose G transitif sur X. Montrer que G est 2-transitif si et seulement si $2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2$.

Exercice 5.4 (Théorème de Burnside)**.** Soit G un groupe et X un ensemble. On suppose que G agit sur X. On note Ω l'ensemble des orbites de l'action de G sur X. Alors

$$\text{Nombre d'orbites de l'action} = |\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_g|$$

où $\mathrm{Fix}_g = \{x \in X \| \ g \cdot x = x\}$.

Indication : Dénombrer l'ensemble $A = \{(g, x) \in G \times X | g \cdot x = x\}$ par deux méthodes distinctes.

Exercice 5.5. On garde les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer en appliquant la formule de Burnside, que si $|X| \geqslant 2$, on a

$$\sum_{g \in G} \chi(g)^2 \geqslant 2|G|.$$

2. On suppose désormais également que G agit transitivement sur X, et on note G_0 l'ensemble des éléments de G ne fixant aucun point de X. Prouver l'encadrement

$$|G| \leqslant \sum_{g \in G} (\chi(g) - 1)(\chi(g) - |X|) \leqslant |X||G_0|$$

et en déduire que $|G_0| \geqslant |G|/|X|$.

Exercice 5.6. 1. Montrer que si le quotient $G/Z(G)$ est cyclique, alors le groupe G est en fait abélien.

2. En déduire qu'un groupe d'ordre p^2 (avec p un nombre premier) est abélien. Montrer qu'à isomorphisme près un groupe d'ordre p^2 est de la forme $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ ou $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.

Exercice 5.7. 1. Soit G un groupe fini et $H < G$ un sous-groupe propre. Montrer que

$$\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \subsetneq G.$$

2. Si $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, montrer qu'il existe un sous-groupe propre H qui intersecte toutes les classes de conjugaison.

6 TD 7

Exercice 6.1. En utilisant l'exercice précédent (et votre connaissance des classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_5$), décrire les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$. En déduire une nouvelle démonstration du fait que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Exercice 6.2. Si $n \geqslant 5$, montrer que $\mathfrak{S}_n$ n'admet pas de sous-groupes d'indice k avec $2 < k < n$. Si $H < \mathfrak{S}_n$ est un sous-groupe avec $[\mathfrak{S}_n, H] = k$, on fera agir $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n/H$ et on s'intéressera au noyau de $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{\mathfrak{S}_n/H} \simeq \mathfrak{S}_k$.

Exercice 6.3. Montrer qu'il existe un morphisme injectif $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{A}_{n+2}$. Peut-on plonger $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{A}_{n+1}$?

7 TD10

Exercice 7.1. On va donner une autre démonstration du premier théorème de Sylow (existence d'un p-Sylow).

1. Soient G un groupe admettant un p-Sylow P et $H < G$ un sous-groupe de G. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $gPg^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H. Pour cela, on fera agir H sur G/P et on s'intéressera aux cardinaux des orbites.
2. Soit maintenant G d'ordre $|G| = n$ et p un diviseur de n. Montrer qu'il existe un plongement de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ et, en utilisant l'exercice précédent, montrer que G admet un p-Sylow.