TD Théorie des groupes

Antoine Dequay, TD type agreg

10 décembre 2023

Dans toute la suite, $\mathbb{F}_q$ dénote le corps fini à q éléments.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension n. Pour tout un entier m avec $0 \leqslant m \leqslant n$, on note X_m l'ensemble des m-uplets $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$ formés de m vecteurs linéaires indépendants.
   (a) Calculer $\mathrm{Card}(X_m)$. En déduire $\mathrm{Card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q))$.
   (b) Quel est le cardinal de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, c'est à dire combien y-a-t-il de droites vectorielles dans E ?
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$. Montrer que $\mathrm{Card}(\mu_n(\mathbb{F}_q)) = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$. En déduire le cardinal de $\mathrm{PSL_n}(\mathbb{F}_q)$.
   Indication : Soit $d = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$. Pour $x \in \mathbb{F}_q^*$, montrer que $x^d = 1$ si et seulement si $x \in \mu_n(\mathbb{F}_q)$. Combien de racines possède le polynôme $X^d - 1$ dans $\mathbb{F}_q^*$?
3. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.
   Indication : Faire opérer $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur $\mathbb{F}_2^2$.
4. Soit $E = \mathbb{F}_3^2$.
   (a) Construire, au moyen des 4 droites vectorielles $D_1, \dots, D_4$ des E un homomorphisme surjectif $\varepsilon : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \mapsto \mathfrak{S}_4$.
   (b) Montrer que ε induit un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ et le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
   (c) En déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ n'est pas parfait. (Un groupe G est parfait s'il coïncide avec le sous-groupe $[G, G]$ engendré par les commutateurs)
5. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$. Indication : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$ opère sur l'ensemble X des droites vectorielles de $\mathbb{F}_4^2$. Quel est le cardinal de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4)$?
6. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension n.
   Pour un entier m avec $0 \leqslant m \leqslant n$, soit $G_{n,m}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension m. Trouver une formule pour $\mathrm{Card}(G_{n,m})$. Indication : $\mathrm{GL_n}(\mathbb{F}_q)$ opère transitivement sur $G_{n,m}$.
8. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $M_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ de la topologie standard.
   (a) Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{SL_n}(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SL_n}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL_n}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL_n}(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.
9. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $\Gamma = \mathrm{SL_n}(\mathbb{Z})$. Pour un nombre premier p, on considère l'homomorphisme $\varphi_p : \Gamma \mapsto \mathrm{SL_n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ induit par la réduction modulo p, i.e. $\varphi_p((a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) = (\overline{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $\overline{a}$ désigne la classe de $a \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que φ_p est surjectif.
   (b) On note Γ_p le noyau de φ_p. Quel est l'indice de Γ_p dans Γ ?
   (c) On suppose que $p \geqslant 3$. Montrer que Γ_p ne possède pas d'éléments d'ordre fini distinct de l'identité.*
   (d) En déduire que Γ ne possède, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de sous-groupes finis.
10. Soit $n \geqslant 2$, et soit $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{Z}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
    (a) Il existe une matrice $A \in \mathrm{SL_n}(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est a.
    (b) $\mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$.