Correction partielle TD analyse 3 - INSA

Antoine Dequay, pour les groupes A et E.

2021-2022

1 Première période

Exercice 4 On cherche à montrer la convergence et calculer l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ n'étant pas définie en $\{-1, 1\}$, on pose $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-1 < a < b < 1$, et on s'intéresse à l'intégrale (propre)

$$\int_a^b \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

On peut effectuer un premier changement de variable :

$x = \sin(t)$	$t = \arcsin(x)$
a	$\arcsin(a)$
b	$\arcsin(b)$
dx	$\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Le changement de variable est bien valide, car on travaille sur l'intervalle $[a, b] \subset]-1, 1[$, et que arcsin réalise une bijection entre $]-1, 1[$ et $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

D'où :

$$\int_a^b \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{dt\sqrt{1-\sin^2(t)}}{(2-\sin^2(t))\sqrt{1-\sin(t)^2}} = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{dt}{2-\sin^2(t)}.$$

Grâce à $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, il vient :

$$\int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{dt}{2-\sin^2(t)} = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{dt}{\cos^2(t)(2-\tan^2(t))} = \frac{1}{2}\int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{dt}{\cos^2(t)\left(1-\left(\frac{\tan(t)}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}.$$

On peut appliquer un nouveau changement de variables (comme avant, on a bien une bijection induite) :

$t = \arctan\left(\sqrt{2}u\right)$	$u = \dfrac{\tan(t)}{\sqrt{2}}$
$\arcsin(a)$	$\dfrac{\tan(\arcsin(a))}{\sqrt{2}}$
$\arcsin(b)$	$\dfrac{\tan(\arcsin(b))}{\sqrt{2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\cos^2(t)}dt$	du

Il vient :

$$\frac{1}{2}\int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{dt}{\cos^2(t)\left(1-\left(\frac{\tan(t)}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\tan(\arcsin(a))}{\sqrt{2}}}^{\frac{\tan(\arcsin(b))}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}du}{(1-u^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\frac{\tan(\arcsin(b))}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{\tan(\arcsin(a))}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

On peut maintenant faire tendre a vers -1 par valeurs supérieures :

$$\lim_{a\to -1, a>-1}\int_a^b \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to -1, a>-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\frac{\tan(\arcsin(b))}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{\tan(\arcsin(a))}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\frac{\tan(\arcsin(b))}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2}\right),$$

En particulier, $\displaystyle\int_{-1}^b \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ existe pour tout $b \in]-1,1[$. On peut maintenant faire tendre b vers 1 par valeurs inférieures :

$$\lim_{b\to 1, b<1}\int_{-1}^b \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1, b<1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\frac{\tan(\arcsin(b))}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ces derniers calculs permettent de prouver que l'intégrale généralisée converge, et on a :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 8

2. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}\frac{n+1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{N}\frac{\sum_{k=0}^{n}1}{3^n} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^n} \rightsquigarrow 0\leq k\leq n\leq N \text{ on peut permuter les sommes } \textbf{finies} : \\
&= \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^k\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N-k+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \\
&= \frac{3}{2}\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}(N+1)\right) \\
&= \frac{9}{4}-\underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}-\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{N}(N+1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \text{ (Crois. Comp.)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Il vient donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}=\frac{9}{4}$.

Exercice 13

— On sait que, pour $x\in\,]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

Ainsi, pour $x_0\in\,]-1,1[$, on a $-x_0\in\,]-1,0]$, et on peut écrire :

$$\frac{1}{1+x_0^2}=\frac{1}{1-(-x_0^2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x_0^2\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x_0^{2n}.$$

On a donc, pour $x\in\,]-1,1[$,

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}. \tag{2}$$

— Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, on a :

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2\left(1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right)}.$$

Ainsi, pour $x_0\in\,]-2,2[$, on a $-\dfrac{x_0}{2}\in\,]-1,1[$, et on peut appliquer (1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x_0}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\left(-\frac{x_0}{2}\right)}=2\times\frac{1}{2+x_0}.$$

Il vient, pour $x \in]-2, 2[$:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n. \tag{3}$$

— Pour $x \in \mathbb{R}\backslash \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, on a :

$$\frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2\left(1-\left(-\frac{3x}{2}\right)\right)}.$$

Ainsi, pour $x_0 \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$, on a $-\frac{3x_0}{2} \in]-1, 1[$, et on peut appliquer (1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3x_0}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{3x_0}{2}\right)} = 2 \times \frac{1}{2+3x_0}.$$

Il vient, pour $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$:

$$\frac{1}{2+3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2^{n+1}} x^n. \tag{4}$$

— Pour $x \in]-5, +\infty[$, on a :

$$\ln(5+x) = \ln\left(5\left(1+\frac{x}{5}\right)\right) = \ln(5) + \ln\left(1+\frac{x}{5}\right).$$

On sait que, pour $x \in]-1, 1]$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \tag{5}$$

Ainsi, pour $x_0 \in]-5, 5]$, on a $\frac{x_0}{5} \in]-1, 1]$, et on peut écrire :

$$\ln\left(1+\frac{x_0}{5}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n5^n} x_0^n.$$

Il vient, pour $x \in]-5, 5]$:

$$\ln(5+x) = \ln(5) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n5^n} x^n.$$

— On considère $f : \begin{pmatrix}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1-x} \end{pmatrix}$. On peut dériver cette fonction, et on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En utilisant (1), il vient sur $]-1,1[$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}(x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n. \tag{6}$$

— On considère $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{3(2+3x)} \end{pmatrix}$. On peut dériver cette fonction, et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(2+3x)^2}.$$

En utilisant (4), il vient $\left]-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$:

$$f(x) = -\frac{1}{3(2+3x)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{2^{n+1}}x^n.$$

Il vient alors, sur $\left]-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$:

$$f'(x) = \frac{1}{(2+3x)^2} = -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{2^{n+1}}x^n\right)' = \frac{1}{-3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(-3)^n}{2^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{(-3)^n}{2^{n+2}}x^n.$$

— On commence par trouver les racines de x^3-3x+2, -2 et 1. La décomposition en éléments simples donne pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$:

$$\frac{1}{x^3-3x+2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{9(x+2)} + \frac{1}{9(1-x)} + \frac{1}{3(1-x)^2}.$$

Grâce à (1), (3) et (6), il vient pour $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{x^3-3x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}9} + \frac{1}{9} + \frac{n+1}{3}\right)x^n.$$

— Par (6), il vient, pour $x \in]-2,2[$:

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{x^3}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x^3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n-2}{2^{n-1}}x^n.$$

— On considère $f : \begin{pmatrix}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix}$. Par (2), on a, pour $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Comme arctan est la primitive de f qui s'annule en 0, il vient sur $]-1,1[$:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \tag{7}$$

Exercice 14

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{8}$$

Il vient donc :

$$e^1 = e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

— Par (8), il vient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \underbrace{(1-1)}_{=0} = e^{-1}.$$

— Toujours par (8), on a :

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right) = e^2 - \frac{19}{3}.$$

— Par (5), il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Exercice 15

— Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(n\theta) \leq 1$, on a $R \geq 1$ (utiliser, à $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, la caractérisation $R = \sup\{x \in \mathbb{R},\ \sin(n\theta)x^n \text{ borné}\}$).

Supposons par l'absurde qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\theta_0) = 0$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin((n+1)\theta_0) = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n\theta_0)\cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)\cos(n\theta_0) = 0.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\theta_0) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2n\theta_0) = 0$. Il vient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\cos(n\theta_0)\right)^2 = 1,$$

ce qui est absurde. Ainsi, si $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, $\sum \sin(n\theta)$ et $\sum \sin(n\theta)(-1)^n$ divergent, donc on a $R = 1$, et plus précisément, le domaine de convergence est $]-1,1[$. Dans ce cas, on a, sur $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\imath n\theta}x^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\imath\theta}x\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-e^{\imath\theta}x}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-x\cos(\theta)+\imath x\sin(\theta)}{(1-x\cos(\theta))^2+(x\sin(\theta))^2}\right) = \frac{1-x\cos(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2}.\end{aligned}$$

Enfin, si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, on a directement $R = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n = 0$.

— On sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (série harmonique alternée, appliquer le théorème spécial des séries alternées). Ainsi, on a $R = 1$ (se représenter le domaine de convergence avec un dessin comme en TD) et la somme est définie sur $[-1,1[$. De (5), on tire, sur $]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

On peut montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$, mais il faut travailler un peu plus.

— Par théorème d'Hadamard, on a $R = 1$, et par théorème des équivalent avec une série de Riemann ($\alpha = 2$), on trouve que le domaine de convergence est $[-1,1]$. En posant $f : \begin{pmatrix}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$ avec, sur $]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On peut primitiver 2 fois sur $]-1,1[$ les deux derniers membres de la série d'égalités (en choisissant toujours la primitive **s'annulant en 0**), il vient successivement, sur $]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

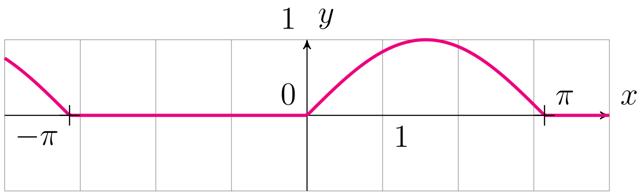
et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} = x - (x-1)\ln(1-x)$$
(les dernières égalités s'obtiennent respectivement par changement de variable dans la somme et intégration par partie).

— Par théorème d'Hadamard (via les croissances comparées), on a $R = 1$. Comme il y a divergence grossière en 1 et -1, le domaine de convergence est $]-1,1[$. En utilisant (6), il vient, sur $]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x \times \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 20

1.



2. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc effectuer les calculs qui suivent :
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)dt = \frac{2}{\pi},$$
$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(2t)dt = 0.$$
Pour $n \geq 2$, on a, avec 2 intégrations par parties :
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)dt = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(t)\sin(nt)dt = -\frac{(-1)^n+1}{n^2\pi} + \frac{1}{n^2}a_n,$$
d'où
$$a_n = -\frac{(-1)^n+1}{\pi\,(n^2-1)}.$$
On a également
$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(t)dt = \frac{1}{2},$$
et, pour $n \geq 2$, des intégrations par parties successives donnent :
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(nt)dt = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}b_n,$$
d'où
$$b_n = 0.$$

(on peut retrouver ce fait, comme déjà vu dans l'exercice 19, en remarquant que $t \longmapsto g(t) - b_1 \sin(t)$ est impaire, et en utilisant le théorème de DIRICHLET, l'unicité de la série de FOURIER et l'additivité des coefficients de FOURIER).

La série de FOURIER associée à g est donc, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$S_g(t) = \frac{1}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(4n^2-1)} \cos(2nt) + \frac{1}{2} \sin(t).$$

Comme g est $\mathbb{C}^1_{mcx}$ et continue, le théorème de DIRICHLET permet d'avoir, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = S_g(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(2nt) + \frac{1}{2} \sin(t).$$

3. — On cherche à calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$. Avoir $\cos(2nt) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dans notre série de FOURIER pourrait nous être très utile. On essaye donc d'évaluer la série en 0 :

$$g(0) = 0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} + 0.$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}.$$

— On cherche à calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$. Avoir $\cos(2nt) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dans notre série de FOURIER pourrait nous être très utile. On essaye donc d'évaluer la série en $\dfrac{\pi}{2}$:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} (-1)^n + \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} = -\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

4. On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = g(t) + g(-t).$$

Il vient donc $a_n(f) = 2a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(vous pouvez vous en assurer par le calcul, en "coupant" les intégrales en 2 et en faisant une changement de variable $u = -t$ dans celle faisant intervenir $g(-t)$, ou alors en utilisant l'unicité de la série de FOURIER et en combinant les termes de celle de g et de $t \longmapsto g(-t)$).

Exercice 21 Comme toujours, on pose $\omega = \dfrac{2}{T}$. Comme $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$, $f' \in \mathbb{C}^0(\mathbb{R})$, donc les calculs qui suivent sont licites. On a :

$$a_0(f') = \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)dt = \frac{2}{T}\left(f(T) - f(0)\right) = 0,$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)\cos(\omega nt)dt = \frac{2}{T}\left[f(t)\cos(\omega nt)\right]_0^T + \frac{2\omega n}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)dt \\ &= \frac{2\omega n}{T}\frac{T}{2}b_n(f) = n\omega b_n(f), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(f') &= \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)\sin(\omega nt)dt = \frac{2}{T}\left[f(t)\sin(\omega nt)\right]_0^T - \frac{2\omega n}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)dt \\ &= -\frac{2\omega n}{T}\frac{T}{2}a_n(f) = -n\omega a_n(f). \end{aligned}$$

Exercice 22

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $|e^{\imath x}| = 1 \neq 2$. Comme la fonction φ est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$, les calculs qui suivent sont licites, et on a :

$$\mathrm{Re}\left(\varphi\left(e^{\imath x}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2 - e^{\imath x}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2 - e^{-\imath x}}{|2 - e^{\imath x}|^2}\right) = \frac{\mathrm{Re}\left(2 - e^{-\imath x}\right)}{4 - 4\cos(x) + 1} = \frac{2 - \cos(x)}{5 - 4\cos(x)}.$$

2. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2\}$, on a :

$$\varphi(z) = \frac{1}{2 - z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{z}{2}}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$

donc il vient, pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 2$ (le rayon de convergence est 2) :

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

3. Par continuité de la partie réelle, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $|e^{\imath x}| = 1 < 2$) :

$$f(x) = \mathrm{Re}\left(\varphi(z)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\imath nx}}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{2^{n+1}}.$$

Par unicité de la série de Fourier, on a donc $a_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $b_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. On a :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt}_{=I} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

La formule de Parseval nous permet d'avoir :

$$\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt}_{=J} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^{n+1}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{7}{24},$$

d'où

$$J = \frac{7\pi}{12}.$$

2 Seconde période

Exercice 1

4. On voit que f est définie si et seulement si $1 - xy \geq 0$. Cela revient à :

$$D = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}, y \geq \frac{1}{x}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

f est la composée de fonctions continues sur D ($\sqrt{\cdot}$, $(x,y) \longmapsto xy$ et $(x,y) \longmapsto 1$), donc est continue sur D.
Pour $c \in \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$, on note les ensembles de niveaux L_c. Par définition de la racine, si $c < 0$, il vient $L_c = \emptyset$. Si $c \geq 0$:

$$L_c = \{(x,y), f(x,y) = c\} = \left\{(x,y), xy = 1 - c^2\right\}.$$

Ainsi, si $c \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$, il vient :

$$L_c = \left\{(x,y) \in D \backslash (\{0\} \times \mathbb{R}), y = \frac{1-c^2}{x}\right\},$$

et

$$L_1 = \{(x,y) \in D, xy = 0\} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

Je vous laisse représenter D !

Exercice 5

— La fonction est différentiable comme composée de telles fonctions sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, donc elle y est continue et ses dérivées partielles existent sur cet ensemble. Regardons maintenant en $(0,0)$.

Un développement limité de sin montre que

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Ainsi, f n'est pas continue (donc à fortiori pas différentiable) en $(0,0)$.

Enfin, en écrivant la définition des dérivées partielles par les limites, on voit directement que les dérivées partielles selon la première et la seconde coordonnée de f en $(0,0)$ existent et sont nulles.

Remarque Attention, le piège est de s'arrêter à la continuité sans parler des dérivées partielles : ce n'est pas parce qu'une fonction n'est pas continue en un point qu'on ne peut pas regarder ses dérivées partielles en ce point : pensez au fait qu'une dérivée partielle est une dérivée dans "une direction", la fonction peut être continue (voir même $\mathbb{C}^\infty$) selon la direction de l'axe des x ou des y au point considéré, mais pas continue selon une autre direction, et donc pas continue "tout court".

2. La fonction est différentiable comme composée de telles fonctions sur $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$, donc elle y est continue et ses dérivées partielles existent sur cet ensemble. Regardons maintenant sur Δ.

   Commençons par la continuité ; soit $(0,y)\in\Delta$, on a :

   $$|f(u,v)-f(0,y)| = |f(u,v)| \leq \frac{|u|\pi}{2}, \text{ car arctan est majoré par } \frac{\pi}{2}.$$

   Ainsi,

   $$\lim_{(u,v)\to(0,y)} |f(u,v)-f(0,y)| = 0,$$

   donc f est continue sur Δ, donc sur $\mathbb{R}^2$.

   Intéressons-nous maintenant aux dérivées partielles sur Δ ; soit $(0,y)\in\Delta$, on a :

   $$\lim_{h\to0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to0}\arctan\left(\frac{y}{h}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } y=0, \\ indefinie \text{ sinon.}\end{cases},$$

   car

   $$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\arctan\left(\frac{y}{h}\right) = \operatorname{sign}(y)\frac{\pi}{2} \neq -\operatorname{sign}(y)\frac{\pi}{2} = \lim_{\substack{h\to0\\h<0}}\arctan\left(\frac{y}{h}\right).$$

   et

   $$\lim_{k\to0}\frac{f(0,y+k)-f(0,y)}{k} = 0.$$

   Ainsi, f n'admet pas de dérivée partielle selon la première variable sur $\Delta\backslash\{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =$

0, et f admet une dérivée partielle nulle selon la seconde variable sur Δ.

Enfin, il reste à s'occuper de la différentiabilité. D'après ce qui précède, f n'est pas différentiable sur $\Delta\backslash\{(0,0)\}$. Il reste le cas de $(0,0)$. Comme il n'existe pas de voisinage de $(0,0)$ où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie partout, on ne peut pas parler de continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$, donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$, donc pas différentiable.

Remarque (*Si vous aimez la topologie*) Pour la différentiabilité en $(0,0)$, on pouvait également penser au fait qu'une fonction n'est différentiable que sur un ouvert, donc ici, elle est différentiable au plus sur l'intérieur de $A = \mathbb{R}^2\backslash\left(\Delta\backslash\{(0,0)\}\right) = \mathbb{R}^2\backslash\Delta \cup \{(0,0)\}$. Hors, $\mathring{A} = \mathbb{R}^2\backslash\Delta$, donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 6

1. On commence par remarque que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme composée de telles fonctions.

   Au point $(0,0)$, on doit prouver "à la main" la continuité de f ainsi que l'existence et la continuité de ses dérivées partielles.

   On voit que :

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{|x^3y|+|xy^3|}{x^2+y^2}\right| = |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0),$$

   donc f est bien continue en $(0,0)$.

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y+3x^2y^3}{x^4+2x^2y^2+y^4},$$

   et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5-x^3y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}.$$

   Pour calculer les dérivées partielles en $(0,0)$, on doit se ramener à la définition faisant intervenir la limite. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$

   et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0.$$

   On a enfin :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{x^4y+3x^2y^3}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{2|x^4y|+4|x^2y^3|+2|y^5|}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right| = 2|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{x^5 - x^3y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{|x^5|+2|x^3y^2|+|xy^4|}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right| = 2|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

Ainsi, les dérivées partielles de f existent en sont continues en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$, donc f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Une nouvelle fois, on doit passer par la définition sous forme de limite de la dérivée partielle. Il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h} = 1,$$

et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0.$$

On a donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Par la contraposée du théorème de Schwarz, f n'est donc pas $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$.

Exercice 7 La méthode a été vue en cours. Les réponses sont les suivantes, avec C, D des fonctions quelconques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et E une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f(x,y) = C(y)$,
2. $f(x,y) = C(x)$,
3. $f(x,y) = xC(y) + D(y)$,
4. $f(x,y) = yC(x) + D(x)$,
5. $f(x,y) = E(y) + D(x)$.

Exercice 8

1. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(r,\theta) = &- r\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &+ r\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &+ \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).\end{aligned}$$

3. Le calcul montre que, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).\end{aligned}$$

4. On cherche les solutions radiales à $\Delta f = 0$, c'est à dire les solutions de l'équation qui s'écrivent $F(r,\theta) = H(r)$ avec $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

   — *Analyse* : Supposons que f soit solution de $\Delta f = 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, F l'est, donc H aussi. On a tout de suite, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

   $$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = H'(r), \ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) = H''(r), \ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0.$$

   Il vient alors, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$:

   $$\frac{1}{r}H'(r) + H''(r) = 0,$$

   que l'on peut réécrire :

   $$-\frac{H''(r)}{H'(r)} = \frac{1}{r}.$$

   On peut alors intégrer l'équation par rapport à r, ce qui donne, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$:

   $$-\ln(H'(r)) = \ln(r) + c,$$

   avec $c \in \mathbb{R}$ une constante. Ainsi :

   $$H'(r) = e^{-c}\frac{1}{r},$$

   d'où, par intégration :

   $$H(r) = e^{-c}\ln(r) + d,$$

   avec $d \in \mathbb{R}$ une constante. On peut alors revenir à la définition de f :

   $$f(x,y) = e^{-c}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + d.$$

   — *Synthèse* : f est donc de la forme $f(x,y) = \lambda \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C$, avec $(\lambda, C) \in \mathbb{R}^2$ des constantes. Cette équation est bien radiale. On peut vérifier que $\Delta f = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

   Ainsi, l'ensemble solution est :

   $$S = \left\{(x,y) \longmapsto \lambda \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C, (\lambda, C) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 9

2. On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

   $$F(u,v) = f(x,y) = f(x+ay, x+by).$$

   Comme $(x,y) \longmapsto (u,v)$ et f sont $\mathcal{C}^2$, elles sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$, donc F aussi. Ainsi, les dérivées partielles premières et secondes de f et F existent, et on a, pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \left(F(x+ay, x+by)\right)}{\partial x}(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}(u_0, v_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(u_0, v_0), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \left(F(x+ay, x+by)\right)}{\partial y}(x_0, y_0) \\
&= a\frac{\partial F}{\partial x}(u_0, v_0) + b\frac{\partial F}{\partial y}(u_0, v_0), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x+ay, x+by) + \frac{\partial F}{\partial y}(x+ay, x+by)\right)}{\partial x}(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u_0, v_0) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(u_0, v_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(u_0, v_0), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \left(a\frac{\partial F}{\partial x}(x+ay, x+by) + b\frac{\partial F}{\partial y}(x+ay, x+by)\right)}{\partial y}(x_0, y_0) \\
&= a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u_0, v_0) + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(u_0, v_0) + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(u_0, v_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x+ay, x+by) + \frac{\partial F}{\partial y}(x+ay, x+by)\right)}{\partial y}(x_0, y_0) \\
&= a\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u_0, v_0) + (a+b)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(u_0, v_0) + b\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(u_0, v_0),
\end{aligned}$$

où $(u_0, v_0) = (x_0 + ay_0, x_0 + by_0)$. Attention, on utilise le théorème de SCHWARZ pour simplifier les calculs !

Remarque Pour être vraiment rigoureux·se, il faudrait noter $F_{(a,b)}$ au lieu de F : la définition de F dépend de a et b !

3. — *Analyse* : Avec $(a, b) = (-1, 1)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Ainsi, pour f une solution de l'équation, on a, par intégration par rapport à la première variable : $F(u, v) = C(v)$, avec $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque (d'après l'exercice 7). Comme dans la question précédente, f est $\mathcal{C}^2$, donc F aussi, donc C aussi.

Ainsi, $f(x, y) = F(x - y, x + y) = C(x + y)$.

— *Synthèse* : Soit $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$. Alors $f(x, y) = C(x+y)$ est bien solution de

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

(calculs laissés au·à la lecteur·rice).

Ainsi, l'ensemble solution est :

$$S = \left\{(x, y) \longmapsto C(x + y), C \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})\right\}.$$

4. — *Analyse* : Avec $(a, b) = (1, -1)$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ainsi, pour f une solution de l'équation, on a, par intégration par rapport à la première variable, puis la seconde : $F(u, v) = E(u) + D(v)$, avec $E, D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions quelconques et E dérivable (d'après l'exercice 7). Comme dans la question précédente, f est $\mathcal{C}^2$, donc F aussi, donc E et D aussi.

Ainsi, $f(x, y) = F(x + y, x - y) = E(x + y) + D(x - y)$.

— *Synthèse* : Soit $E, D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^2$. Alors $f(x, y) = E(x+y)+D(x-y)$ est bien solution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(calculs laissés au·à la lecteur·rice).

Ainsi, l'ensemble solution est :

$$S = \left\{(x, y) \longmapsto E(x + y) + D(x - y), (E, D) \in \left(\mathcal{C}^2(\mathbb{R})\right)^2\right\}.$$

5. — *Analyse* : Avec $(a, b) = (0, 1)$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Ainsi, pour f une solution de l'équation, on a, par double intégration par rapport à la première variable : $F(u, v) = uC(v) + D(v)$, avec $C, D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions quelconques (d'après l'exercice 7). Comme dans la question précédente, f est $\mathcal{C}^2$, donc F aussi, donc C et D aussi.

Ainsi, $f(x, y) = F(x, x + y) = xC(x + y) + D(x + y)$.

— *Synthèse* : Soit $C, D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^2$. Alors $f(x, y) = xC(x+y)+D(x+y)$ est bien solution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(calculs laissés au·à la lecteur·rice).

Ainsi, l'ensemble solution est :

$$S = \left\{(x, y) \longmapsto xC(x + y) + D(x + y), (C, D) \in \left(\mathcal{C}^2(\mathbb{R})\right)^2\right\}.$$

Exercice 10

1. La fonction f est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On peut donc calculer ses dérivées partielles, pour $(x_{,0}\,, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4y_0 - 4x_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 4x_0 - 4y_0^3.$$

L'ensemble des points critiques de f est l'ensemble des points d'annulation de son gradient, c'est à dire l'ensemble des $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tels que $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0$. On trouve l'ensemble $E_P = \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}$.

Pour savoir si on a affaire à des extrema locaux, on calcule la hessienne en ces points :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12y_0^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque On retrouve le théorème de Schwarz dans le fait que la hessienne est une matrice symétrique !

On peut calculer le déterminant et la trace de cette matrice, toujours pour y_0 quelconque :

$$\begin{aligned} \det\left(\nabla^2 f(x_0, y_0)\right) &= 48y_0^2 - 16, \\ \operatorname{tr}\left(\nabla^2 f(x_0, y_0)\right) &= -4 + 12y_0^2. \end{aligned}$$

— On voit alors que $\det\left(\nabla^2 f(0,0)\right) = -16 < 0$, donc $(0,0)$ n'est pas n extremum local (c'est un point selle).

— De même, on voit que $\det\left(\nabla^2 f(1,1)\right) = \det\left(\nabla^2 f(-1,-1)\right) = 32 > 0$ et $\operatorname{tr}\left(\nabla^2 f(1,1)\right) = \operatorname{tr}\left(\nabla^2 f(-1,-1)\right) = 40 > 0$. Ainsi, $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont des minima locaux.

2. La fonction f est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On peut donc calculer ses dérivées partielles, pour $(x_{,0}\,, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0^3 - 4x_0 + 4y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 4y_0^3 + 4x_0 - 4y_0.$$

L'ensemble des points critiques de f est l'ensemble des points d'annulation de son gradient, c'est à dire l'ensemble des $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tels que $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0$. On trouve l'ensemble $E_P = \left\{(0,0), \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)\right\}$.

Pour savoir si on a affaire à des extrema locaux, on calcule la hessienne en ces points :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_0,y_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12x_0^2-4 & 4 \\ 4 & 12y_0^2-4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Remarque On retrouve le théorème de SCHWARZ dans le fait que la hessienne est une matrice symétrique !

On peut calculer le déterminant et la trace de cette matrice, toujours pour (x_0,y_0) quelconque :

$$\begin{aligned}\det\left(\nabla^2 f(x_0,y_0)\right) &= (12x_0^2-4)(12y_0^2-4)-16, \\ \mathrm{tr}\left(\nabla^2 f(x_0,y_0)\right) &= -8-12(x_0^2+y_0^2).\end{aligned}$$

- On voit alors que $\det\left(\nabla^2 f(0,0)\right) = 0$. Dans ce cas, on ne peut pas conclure directement, il faut un peu plus d'astuce :

  On voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,x) = 2x^4 \geq 0$ et que pour $x \in]-2,2[$, $f(x,-x) = 2x^2(x^2-4) \leq 0$. On peut alors conclure que $(0,0)$ n'est pas un extremum local.
- On voit que $\det\left(\nabla^2 f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right) = \det\left(\nabla^2 f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right) = 384 > 0$ et $\mathrm{tr}\left(\nabla^2 f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right)$ $\mathrm{tr}\left(\nabla^2 f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right) = -32 < 0$. Ainsi, $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ sont des maxima locaux.

3. La fonction f est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car produit de telles fonctions. On peut donc calculer ses dérivées partielles, pour $(x_{,0}, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = e^{-(x_0^2+y_0^2)}\left(4x_0-4x_0^3-6x_0y_0^2\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = e^{-(x_0^2+y_0^2)}\left(6y_0-4y_0x_0^2-6y_0^3\right).$$

L'ensemble des points critiques de f est l'ensemble des points d'annulation de son gradient, c'est à dire l'ensemble des $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, tels que $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = 0$. On trouve l'ensemble $E_P = \{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$.

Pour savoir si on a affaire à des extrema locaux, on calcule la hessienne en ces points :

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x_0,y_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \\ &= e^{-(x_0^2+y_0^2)}\begin{pmatrix} 4-20x_0^2+8x_0^4+12x_0^2y_0^2-6y_0^2 & -20x_0y_0+8x_0^3y_0+12x_0^2y_0^2 \\ -20x_0y_0+8x_0^3y_0+12x_0^2y_0^2 & 6-4x_0^2-30y_0^2+8y_0^2x_0^2+12y_0^4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Remarque On retrouve le théorème de SCHWARZ dans le fait que la hessienne est une matrice symétrique !

Calculer le déterminant et la trace de cette matrice, pour (x_0, y_0) quelconque serait affreux. On va donc regarder au cas par cas :

—
$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

donc $\det\left(\nabla^2 f(0,0)\right) = 24 > 0$ et $\operatorname{tr}\left(\nabla^2 f(0,0)\right) = 10 > 0$. Ainsi, $(0,0)$ est un minimum local.

—
$$\nabla^2 f(0,1) = \nabla^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -12e^{-1} \end{pmatrix},$$

donc $\det\left(\nabla^2 f(0,1)\right) = \det\left(\nabla^2 f(0,-1)\right) = 24e^{-2} > 0$ et $\operatorname{tr}\left(\nabla^2 f(0,1)\right) = \operatorname{tr}\left(\nabla^2 f(0,-1)\right) = -14e^{-1} < 0$. Ainsi, $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont des maxima locaux.

—
$$\nabla^2 f(1,0) = \nabla^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} -8e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix},$$

donc $\det\left(\nabla^2 f(1,0)\right) = \det\left(\nabla^2 f(-1,0)\right) = -36e^{-2} < 0$, donc $(1,0)$ et $(-1,0)$ ne sont pas des extrema locaux.

Exercice 11

1. K est un compact de $\mathbb{R}^2$ (fermé comme produit de fermés de $\mathbb{R}$, et borné), et f est continue sur K car polynomiale. Ainsi, f est bornée et atteint ses bornes sur K.
2. Comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, elle l'est sur l'intérieur de K : $\overset{\circ}{K} =]0,1[^2$. Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 + 3x_0^2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1 + 3y_0^2.$$

f n'admet pas de point critique sur $\overset{\circ}{K}$, donc pas d'extrema local (donc pas de global) sur $\overset{\circ}{K}$. Ses extrema se situent donc sur le bord de K : $\partial K = K \backslash \overset{\circ}{K}$. Sur ce bord, f s'écrit, pour $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$:

$$f(0,y) = -y + y^3, \quad f(1,y) = 2 - y + y^3, \quad f(x,0) = f(x,1) = x + x^3.$$

On s'est ramener à la recherche d'extrema pour des fonctions à une seule variable. Une étude élémentaire montre que le maximum vaut 2 (et est atteint en $(1,0)$ et $(1,1)$) et que le minimum vaut $-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ (et est atteint en $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$).

Exercice 12

1. On a :
$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + y^3 - xy - 1 = 0\right\}.$$
On note $h(x,y) = x^3 + y^3 - xy - 1$. La fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale. De plus, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,1) = 3-1 = 2 \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe $\alpha > 0$ et $\varphi :]1-\alpha, 1+\alpha[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que pour $(x,y) \in \Gamma$ proche de $(1,1)$, $h(x,\varphi(x)) = 0$, $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[$.
Si on dérive une ou deux fois par rapport à x la formule, pour $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[$, il vient :
$$\frac{d}{dx}h(x,\varphi(x)) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial h}{\partial y}(x,\varphi(x)) = 0 \Longrightarrow \varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial h}{\partial y}(1,1)},$$
et
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}h(x,\varphi(x)) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + 2\varphi'(x)\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,\varphi(x)) \\ &\quad + \varphi''(x)\frac{\partial h}{\partial y}(x,\varphi(x)) + (\varphi'(x))^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,\varphi(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow \varphi''(1) = -\frac{-1}{\frac{\partial h}{\partial y}(1,1)}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,1) + 2\varphi'(1)\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1,1) + (\varphi'(1))^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(1,1)\right),\end{aligned}$$
Il vient alors :
$$\begin{cases}\varphi(1) = 1, \\ \varphi'(1) = -\dfrac{2}{2} = -1 \\ \varphi''(1) = \dfrac{-1}{2}(6+2+6) = -7\end{cases}$$
On en déduit un DL à l'ordre 2 de φ en 1 :
$$\varphi(1+h) = \varphi(1) + \varphi'(1)h + \frac{1}{2}\varphi''(1)h^2 + o(h^2) = 1 - h - \frac{7}{2}h^2 + o(h^2).$$
Il ne reste plus qu'à tracer ce polynôme pour avoir l'allure de Γ au voisinage de $(1,1)$!
2. On a :
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy - \sin(y) + x = 0\right\}.$$
On note $h(x,y) = xy - \sin(y) + x$. La fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, comme somme de telles fonctions. De plus, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe $\alpha > 0$ et $\varphi :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que pour $(x,y) \in \Gamma$ proche de $(0,0)$, $h(x,\varphi(x)) = 0$, $x \in]-\alpha, \alpha[$.

Si on dérive une troisième fois par rapport à x la formule, pour $x \in]-\alpha, \alpha[$, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3}h(x,\varphi(x)) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + 2\varphi'(x)\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,\varphi(x)) \\ &\quad +\varphi''(x)\frac{\partial h}{\partial y}(x,\varphi(x)) + (\varphi'(x))^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,\varphi(x))\Big) \\ &= \frac{d}{dx}\left(2\varphi'(x) + \varphi''(x)(x-\cos(\varphi(x))) + (\varphi'(x))^2\sin(\varphi(x))\right) \\ &= 2\varphi''(x) + \varphi^{(3)}(x)(x-\cos(\varphi(x))) + \varphi''(x)(1+\varphi'(x)\sin(\varphi(x))) \\ &\quad + 2\varphi''(x)\varphi'(x)\sin(\varphi(x)) + (\varphi'(x))^3\cos(\varphi(x)) = 0 \\ &\implies \varphi^{(3)}(0) = 3\varphi''(0) + (\varphi'(0))^3,\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases}\varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = 1 \\ \varphi''(0) = 2 \\ \varphi^{(3)}(0) = 7\end{cases}$$

On en déduit un DL à l'ordre 3 de φ en 0 :

$$\varphi(h) = h + h^2 + \frac{7}{6}h^3 + o(h^3).$$

Exercice 13 (vu en cours)

1. On note les lignes de niveau associées à $c \in \mathbb{R}$:

$$L_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = c\right\}.$$

Ainsi, il vient $L_0 = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$, et, pour $c \neq 0$,

$$L_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = \frac{c}{x}\right\}.$$

Pour l'allure, je vous laisse voir !

2. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc on peut commencer par chercher ses points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0.$$

L'unique point critique de f est donc $(0,0)$. La hessienne de f en $(0,0)$ est $\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Son déterminant est négatif, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum (mais un point selle).

3. Puisque $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 = 4\right\}$ est compact (fermé et borné ; c'est une ellipse). Puisque f est continue sur C compact, f admet au moins un minimum global sur C, noté

(x_0, y_0). On note $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$, et on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = y + 8\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = x + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

On trouve $\lambda = \pm\dfrac{1}{4}$, puis :

$$(x_0, y_0) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{2}\right).$$

Il ne reste plus qu'à tester les valeurs sur f, et on trouve que le minimum est atteint en $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$, et a pour valeur -1.

Exercice 14 Vu en cours.

Exercice 15 *Commencez par lire la remarque de fin !*

On se donne un cylindre "interne" de rayon r, de hauteur h et d'épaisseur de paroi e. Le volume interne du cylindre est donc $V(r, h) = \pi r^2 h$, et le volume d'aluminium nécessaire pour créer la boîte de conserve est de $V_{alu}(r, h) = \pi(r + e)^2(h + 4e) - \pi r^2 h$.

Sans rentrer dans les détails physiques, on va supposer qu'on a accès à un volume $V_\alpha = V_m \alpha$ d'aluminium, où V_m est le volume molaire de l'aluminium. On cherche donc à maximiser $V(r, h)$, sous la contrainte $V_{alu}(r, h) = V_\alpha$, avec α et e des constantes strictement positives. On note $g(r, h) = V_{alu}(r, h) - V_\alpha = \pi(r + e)^2(h + 4e) - \pi r^2 h - V_\alpha$. V et g sont $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et on cherche à résoudre le problème (P) : $\sup\{V(r, h) \text{ sous la contrainte } g(r, h) = 0\}$. On note $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = V(x, y) + \lambda g(x, y) = \pi x^2 y + 4\lambda\pi e x^2 + 2\lambda\pi e x y + 8\lambda\pi e^2 x + \lambda\pi e^2 y + 4\lambda\pi e^3 - \lambda V_\alpha$, et on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2\pi x y + 8\lambda\pi e x + 2\lambda\pi e y + 8\lambda\pi e^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = \pi x^2 + 2\lambda\pi e x + \lambda\pi e^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 4\pi e x^2 + 2\pi e x y + 8\pi e^2 x + \pi e^2 y + 4\pi e^3 - V_\alpha = 0 \end{cases}$$

On peut alléger le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = xy + 4\lambda e x + \lambda e y + 4\lambda e^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = x^2 + 2\lambda e x + \lambda e^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 4ex^2 + 2exy + 8e^2 x + e^2 y + 4e^3 - \dfrac{V_\alpha}{\pi} = 0 \end{cases}$$

La seconde lignes est une polynôme du second degré en x, son discriminant est $\Delta = 4\lambda e^2(\lambda - 1)$. Suivant les valeurs de λ, on obtient celles de x. On peut alors injecter les solutions dans la première ligne, exprimer y en fonction de λ, insérer le tout dans la troisième équation, et résoudre, en pensant au fait que x et y sont positifs.

Il reste alors à vérifier que, pour les solutions trouvées, $\nabla g \neq 0$, puis chercher les maximums parmis les candidats possibles, en utilisant les conditions au second degré.

Remarque Vous pouvez pousser les calculs jusqu'au bout, mais ils me semblent pénibles à mener (mais promis, on peut y arriver). Une version plus simple est de considérer que la contrainte doit se faire sur une proportion entre α et l'aire du cylindre, comme vu dans votre cours, plutôt que qu'entre α et le volume V_{alu} ici utilisé.

Exercice 16 On peut calculer l'aire et le périmètre en fonction de x et y :

$$A(x,y) = xy + \pi\frac{x^2}{2}, \quad P(x,y) = 2y + x + \pi\frac{x}{2}.$$

On cherche à résoudre (P) : $\inf\{P(x,y) \text{ sous la contrainte } A(x,y) - c = 0\}$. On note $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = P(x,y) + \lambda(A(x,y) - c) = xy + \frac{\pi}{2}x^2 + 2\lambda y + \lambda x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \lambda c$, et on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = y + \pi x + \lambda\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = x + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 2y + x\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) - c = 0 \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre lancer la "standard machine" !

Exercice 17 Commencez par faire un dessin. Des considérations géométriques permettent de remarquer que les cercles qui composent les bords du cylindre sont dans la sphère de rayon R. On note r le rayon de la base du cylindre, et h sa hauteur. On peut calculer le volume du cylindre : $V(r,h) = \pi r^2 h$. Le théorème de Pythagore et votre meilleur dessin nous donne la contrainte : $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$. En posant $g(r,h) = r^2 + \frac{h^2}{4} - R^2$, on peut alors appliquer la standard machine... (lagrangien, etc.)

Exercice 18

1. a. On veut résoudre, d'après l'énoncé :$x_0 = bx_0 + (1-b)(aT_0 + (1-a)S)$. Cela donne :

$$T_0 = \frac{x_0 - (1-a)S}{a} = S + \frac{x_0 - S}{a}.$$

b. On note x_1 la température à 1h du matin. On a alors les relations :

$$\begin{cases} x_1 = bx_0 + (1-b)(aT_1 + (1-a)S) \\ x_0 = bx_1 + (1-b)(aT_2 + (1-a)S) \end{cases}$$

Il vient alors :

$$T_1 = \frac{-aT_2 + (1+b)(x_0 - (1-a)S)}{ab}.$$

c. On cherche à minimiser ($\alpha = 1$) :

$$C(T_1, T_2) = (T_0 - S)^2 + (T_1 - S)^2 + (T_2 - S)^2.$$

T_0 est déjà entièrement déterminer, et on peut injecter l'équation de la question précédente pour arriver à chercher à minimiser :

$$(T_2 - S)^2 + \left(\frac{-aT_2 + (1+b)(x_0 - (1-a)S)}{ab} - S\right)^2 = (T_2 - S)^2 + \left(\frac{T_2}{b} - U\right)^2,$$

où $U = \dfrac{(1+b)((1-a)S - x_0)}{ab} + S$.
On cherche à minimiser (en fonction de T_2) la fonction :

$$T_2^2\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) - 2\frac{S+U}{b}T_2 + \left(S^2 + U^2\right).$$

C'est un polynôme du second degré, et $1 + \dfrac{1}{b^2} > 0$, donc le minimum est atteint en $\dfrac{S+U}{b+\frac{1}{b}}$. Il ne reste plus qu'à conclure !

Remarque On pouvait également, et c'est plus dans l'esprit de votre TD, chercher à résoudre le problème

$$\begin{aligned}(P):\ \inf\{&C(T_1,T_2) \text{ sous la contrainte} \\ &b\left(bx_0 + (1-b)(aT_1 + (1-a)S)\right) + (1-b)(aT_2 + (1-a)S) - x_0 = 0\}.\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à appliquer la "standard machine". Ici, on n'a pas besoin de développer les calculs précédents, et les dérivées se calculent facilement : gain de temps !

d. Je vous laisse vous en charger...

2. Par exemple : les calculs précédents restent valides, on peut injecter les valeurs de T_1 et T_2 dans C, et en déduire x_0...

3 Bonus

Exercice 1 Exam janvier 2020

1. f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme composée de telles fonctions (le dénominateur s'annule uniquement en $(0,0)$).

Regardons maintenant la continuité en $(0,0)$:

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{|xy|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| = |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier !

2. Les calculs donnent, pour $(x,y) \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{x^4+2x^2y^2+y^4}.$$

Pour $(x,y)=(0,0)$, on doit se ramener à la définition de la dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Pour s'éviter des calculs, on remarque que :

$$f(x,y) = -f(y,x).$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$. On peut alors conclure race à ce qui précède !

3. La fonction f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ donc composée de telles fonctions.
Pour savoir si f est $\mathcal{C}^1$ est $(0,0)$, on cherche à vérifier que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et que } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

D'après la remarque de la question précédente (en gras), il suffit de prouver

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

l'autre équation découle directement. On a :

$$\left|\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{2|x^4y|+|4x^2y^3|+2|y^5|}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right| = 2|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Cela montre que f est CC^1 sur $\mathbb{R}^2$!

Exercice 1 Exam janvier 2019

1. f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme composée de telles fonctions (le dénominateur s'annule uniquement en $(0,0)$).
Regardons maintenant la continuité en $(0,0)$:

$$|f(x,y)| = \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{|y^3|+|x^2y|}{x^2+y^2}\right| = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier !

Remarque Autre technique possible : on peut utiliser la propriété du cours qui dit que si, pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leq |r|^c$ avec c une constante positive, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y)| = 0$. En effet, ici, on a $c = 1$:

$$|f(r, \cos(\theta), r\sin(\theta))| = \left|\frac{r^3 \sin(\theta)^3}{r^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)}\right| = \left|r\sin(\theta)^3\right| \leq |r|.$$

2. Les calculs donnent, pour $(x, y) \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2y^3x}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$, on doit se ramener à la définition de la dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

De même, on a, pour $(x, y) \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3x^2y^2 + y^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k - 0}{k} = 1.$$

3. La fonction f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ donc composée de telles fonctions. Pour savoir si f est $\mathcal{C}^1$ est $(0, 0)$, on cherche à vérifier que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ et que } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Or, on a, pour $x \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{-2x^4}{4x^4} = -\frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Ainsi, $(x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$, donc f n'est par $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$.

4. On a :
   - $g(0) = f(\sin(0), 3 \times 0 + 1) = f(0, 1) = 1$,
   - $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sin(t), 3t + 1) \times \cos(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin(t), 3t + 1) \times 3$, donc :

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 3.$$