

## Réductio des endos normaux de 1 espace euclidien

[Gaudon alg p 259]

• Th Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  normal (c'est  $u$  commute  $u$  et  $u^*$ )

Alors  $\exists B$  base orthonormée de  $E$  tq  $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_s \end{pmatrix}$

où  $R_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

lemme  $u$  = endo normal;  $F$  = sev  $u$  stable.

Alors  $F$  est  $u^*$  stable,

$F^\perp$  est  $u$  et  $u^*$  stable

$u|_F$  et  $u|_{F^\perp}$  sont normaux

démo On a  $E = F \oplus F^\perp$  : Soit  $B$  1 base adaptée à cette décomposition et orthonormée (p que  $\text{Mat}(u^*) = {}^t \text{Mat}(u)$ )

$M = \text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ . Comme  $u$  est normal,  $u u^* = u^* u$

$$\text{donc } M {}^t M = {}^t M M \quad (*)$$

donc (matrice en haut à gauche)

$${}^t A A = A {}^t A + B {}^t B \quad \text{donc en passant à la trace, } {}^t (B {}^t B) = 0 = \|B\|^2$$

$$\text{où } \|B\| = {}^t ({}^t M M)^{1/2} \quad \text{donc } B = 0 \Rightarrow F^\perp \text{ est } u \text{ stable}$$

$$\text{et } (*) \Rightarrow {}^t A A = A {}^t A \text{ et } {}^t C C = C {}^t C \Rightarrow u|_F \text{ et } u|_{F^\perp} \text{ sont normaux}$$

$$\text{De plus } {}^t M = \begin{pmatrix} {}^t A & 0 \\ 0 & {}^t C \end{pmatrix} \Rightarrow F \text{ et } F^\perp \text{ } u^* \text{ stables}$$

$$(\text{rg: } M = \text{Mat}(u), {}^t M = \text{Mat}(u^*), A = \text{Mat}(u|_F), {}^t A = \text{Mat}(u^*|_F),$$

$$C = \text{Mat}(u|_{F^\perp}), {}^t C = \text{Mat}(u^*|_{F^\perp}))$$

démo Rk / réc sur  $\dim(E) = n$  (réc forte)

Si  $n = 1$   $B = (1)$  convient.

Soit  $n \geq 2$ . On suppose le résultat jusqu'au rg  $n-1$

Cas 1:  $u$  admet 1 vp  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $E_\lambda$  est  $u$  stable et  $u|_{E_\lambda}$  est normal

sur 1 ev de dim  $\leq n-1$  et  $E_\lambda^\perp$  est  $u$  stable et  $u|_{E_\lambda^\perp}$  est normal

sur 1 ev de dim  $n-1$ . On applique HR pour  $u|_{E_\lambda}$  et  $u|_{E_\lambda^\perp}$  et on

concaténer les 2 BON trouvés pour obtenir 1 base B qui convient (à permutation près des vecteurs)

→ on mq y a 1 plan  $u$ -stable

Cas 2 : si on n'a pas de vp réelle. Alors  $\chi_u$  admet 1 facteur irred  $Q = X^2 + aX + b$

on mde  $N = \ker(Q(u)) \neq \{0\}$ . En effet  $Q(u)$  est pas bijective car

$$\det Q(u) = \det (u - \lambda \text{id}_E) \circ (u - \bar{\lambda} \text{id}_E) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C} \text{ est vp de } u \\ = 0$$

Soit donc  $x \in N \setminus \{0\}$  et notons  $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(x, u(x))$

$F$  est de dim 2 sinon  $\exists \lambda, u(x) = \lambda x$  donc  $u$  admet 1 vp  $\Rightarrow \chi$

$F$  est  $u$ -stable (car  $u(x) \in F$  et  $u^2(x) = -au(x) - bx \in F$ )

/ Lemme,  $F^\perp$  est  $u$ -stable de dim  $n-2$  et  $u|_{F^\perp}$  normal donc  $\exists B_2$  BON

tg  $\text{Mat}_{B_2}(u|_{F^\perp})$  est de la forme voulue.

D'autre part soit  $B$  1 BON de  $F$ .  $\text{Mat}(u|_F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{Comme } u|_F \text{ est normal, on a } \begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + c^2 & (1,1) \\ ab + cd = ac + bd & (1,2) \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

(1)  $\Rightarrow b = \pm c$ . Or, si  $b = 0$ ,  $u$  a 1 vp réelle  $\Rightarrow \chi$

$$\text{si } b = c \text{ alors } \chi_{u|_F} = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$$

$$\text{de discriminant } (a+d)^2 - 4ad + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  une racine réelle pr  $\chi_{u|_F}$

$\Rightarrow$  une vp  $\mathbb{R}$  pour  $u \Rightarrow \chi$

$$\text{Donc } b = -c$$

$$(2) \Rightarrow \cancel{ab} = \cancel{cd} \Rightarrow a = d \quad \text{donc } \text{Mat}_B(u|_F) = \begin{pmatrix} a+b & \\ b & a \end{pmatrix} \text{ est de la forme voulue}$$

on conclut en concaténant  $B$  et  $B_2$