

[Rouvière p 143]

TR Liapounov : Soit le Σ diff, $y' = f(y)$ où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1
 $y(0) = x$

et $f(0) = 0$. Si $Df(0)$ a toutes ses vps de partie réelle < 0

alors l'origine est 1 pt d'équilibre attractif du Σ : pr tt x assez voisin de 0,

la soluto $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 qd $t \rightarrow +\infty$ (Rouvière p 138 $\rightarrow$ 143)

A. des pt d'équilibre attractif

• 1 ex + ce résultat reste-t-il vrai si x quelconque ?

• Justification de $\exists$ d'une soluto au Σ ?

démo : On considère le Σ linéarisé autour de 0 : $\begin{cases} z' = \overbrace{Df(0)}^{=A} z \\ z(0) = x \end{cases}$

et on montre que 0 est attractif pr ce Σ . Puis on mg le résultat est conservé pour le Σ de départ.

• On note λ_i les vps de A . / hp $\text{Re}(\lambda_i) < 0$

norme euclidienne associée au ps $\langle, \rangle$

On mg $\exists$ 1 polynôme P tq $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|e^{tA} x\| \leq P(|t|) \left(\sum_{i=1}^k e^{t \text{Re}(\lambda_i)} \right) \|x\|$.

/ TDDN, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker} (A - \lambda_i I_m)^{m_i}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = x_1 + \dots + x_k$

Donc $e^{tA} x_i = e^{t(\lambda_i I_m + A - \lambda_i I_m)} x_i = e^{t \lambda_i} e^{t(A - \lambda_i I_m)} x_i$
 $= e^{t \lambda_i} \left(\sum_{p=0}^{m_i-1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_i I_m)^p x_i \right)$
 $= 0$ pour $p \geq m_i$ car $x_i \in \text{Ker} (A - \lambda_i I_m)^{m_i}$

$= e^{t \lambda_i} \left(\sum_{p=0}^{m_i-1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_i I_m)^p \right) x_i$

pg y ena besoin ?

Donc $\|e^{tA} x_i\| \leq e^{t \text{Re}(\lambda_i)} C (1+|t|)^{m_i-1} \|x_i\| \leq e^{t \text{Re}(\lambda_i)} C (1+|t|)^{m-1} \|x_i\|$

Donc $\|e^{tA} x\| \leq \sum_{i=1}^k \|e^{tA} x_i\| \leq C (1+|t|)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^k e^{t \text{Re}(\lambda_i)} \right) \|x\|_\infty \leq 2 \|x\|$

pu $\sim$ des normes donc OK

• On en déduit que la soluto $z(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ exponentiellement :

$z(t) = e^{tA} x$ est l'! soluto du linéarisé. Comme les vps de A ont 1 Re < 0 ,

$\exists a > 0$ tq $\forall i, \text{Re}(\lambda_i) < -a$

Pu le point précédent, $\|z(t)\| = \|e^{tA} x\| \leq P(|t|) \left(\sum_{i=1}^k e^{t(\text{Re}(\lambda_i) - a + a)} \right) \|x\|$
 $= P(|t|) \left(\sum_{i=1}^k e^{t(\text{Re}(\lambda_i) + a)} \right) e^{-at} \|x\|$

borné car $t > 0$ msi C

• On définit $b : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $b(x, y) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA} x, e^{tA} y \rangle dt$ est 1 fbo bien def et que la forme quad associée est def ≥ 0 ($q =$ fonction de dissipation)

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad |\langle e^{tA} x, e^{tA} y \rangle| \stackrel{\text{ICS}}{\leq} \|e^{tA} x\| \|e^{tA} y\|$$

$$\leq C^2 e^{-2\alpha t} \|x\| \|y\| \text{ par le pt précédent}$$

qui est $\int_0^{+\infty} dt$ donc b bien def

OK pour bilin & sym.

De plus, $q(x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA} x\|^2 dt \geq 0$ et $q(x) = 0 \Rightarrow t \mapsto \|e^{tA} x\|$ est nulle $\Rightarrow \forall t \in [0, +\infty[, e^{tA} x = 0$

En particulier pour $t = 0$, $x = 0$ donc $q > 0$

• On définit $\langle \text{grad } q(x), Ax \rangle = 2b(x, Ax) = -\|x\|^2$

On a $\langle \text{grad } q(x), y \rangle = Dq(x)(y)$ (différentielle de q en x évaluée en y)

$$\text{Or, } q(x+h) = q(x) + 2b(x, h) + \underbrace{q(h)}_{= o(\|h\|) \text{ par ICS (car } b \text{ est 1 p.o.)}}$$

$$\text{Donc } Dq(x) : h \mapsto 2b(x, h)$$

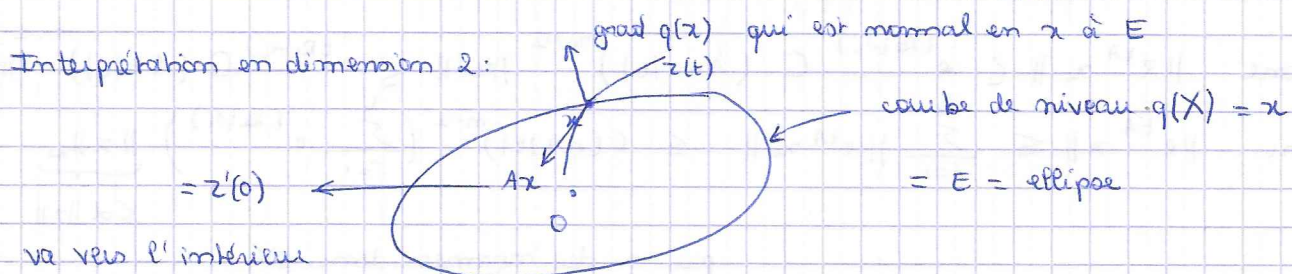
$$\text{En particulier, } \langle \text{grad } q(x), Ax \rangle = 2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2 \langle e^{tA} x, e^{tA} Ax \rangle dt$$

= dérivée de $t \mapsto \|e^{tA} x\|^2$

par composition.

$$= \left[\|e^{tA} x\|^2 \right]_0^{+\infty} = 0 - \|x\|^2$$

$$\text{puisque } z(t) = e^{tA} x \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$



de l'ellipse puisque produit scalaire $\langle \text{grad } q(x), Ax \rangle = -\|x\|^2 \leq 0$

$\hookrightarrow$ être au point où ≤ 0 signifie ≤ 0 d'1 po

• On admet l' $\exists$ d' α autour y au Σ de départ $\rightarrow$ justification? ^{du} pour $t \geq 0$

On note $r(y) = f(y) - Ay$ (monotonement, c'est la $\neq$ entre f et sa linéarisée) de petit
(Δ y a des t assez petits : $r(y(t)) = f(y(t)) - Ay(t)$)

$$\text{Hg } \forall t \geq 0, \quad q(y)'(t) = -\|y(t)\|^2 + 2b(y(t), r(y(t)))$$

$$\begin{aligned} q(y)' &= Dq(y) y' = 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{comme avant}}}{b(y, y')} = 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par def } y}}{b(y, Ay)} + 2b(y, r(y)) \\ &= -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \end{aligned}$$

comme $\sqrt{q}$ est 1 norme, $\forall CS, |b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)} \sqrt{q(r(y))}$

Écrivons la définition de "f est différentiable en 0" pour la norme $\sqrt{q}$ (toutes $\sim$) :

$$f(y) = \underbrace{f(0)}_0 + \underbrace{Df(0)}_{=A}(y) + o(\sqrt{q(y)})_{y \rightarrow 0}$$

Donc $r(y) = f(y) - Ay = o(\sqrt{q(y)})_{y \rightarrow 0}$ ce qui se réécrit (définition de $\rightarrow 0$ pr norme $= \sqrt{q}$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } \sqrt{q(y)} \leq \alpha \Rightarrow \sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon \sqrt{q(y)}$$

$$\text{Donc } \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } q(y) \leq \alpha \Rightarrow |b(y, r(y))| \leq \varepsilon q(y)$$

comme $\sqrt{q}$ et $\| \cdot \|$ sont $\sim$, $\exists C > 0, \forall y, Cq(y) \leq \|y\|^2$. Avec $\varepsilon < \frac{C}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \forall y : q(y) \leq \alpha &\Rightarrow q(y)' \leq -Cq(y) + 2\varepsilon q(y) \\ &= (2\varepsilon - C) q(y) \\ &= -\beta q(y) \text{ où } \beta = C - 2\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Moralité : } \exists \alpha, \beta > 0 \text{ tq } q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' \leq -\beta q(y)$$

(qd y est suffisamment petit, y va vers l'intérieur d'une ellipse)

• Si $q(x) < \alpha$ (cad x voisin de 0) alors $\forall t \geq 0, q(y(t))' \leq -\beta q(y(t))$

En effet $q(x) < \alpha \Rightarrow q(y(t)) \leq \alpha$ (donc on peut utiliser le pt précédent)

car sinon il existerait 1 premier instant $t_0 > 0$ tq $q(y(t_0)) = \alpha$ (c°)

et on aurait $q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$ d'où ∇ locale de $q \circ \gamma$ au voisinage de t_0 ce qui $\Rightarrow$ que pour des t un peu avant t_0 , $q(y(t)) > \alpha \Rightarrow$

X avec def de t_0 .

• On "résout" cette inéquation vérifiée par $q \circ \gamma : (f' \leq -\beta f)$

$$(e^{\beta t} q(y(t)))' = e^{\beta t} q(y)' + \beta e^{\beta t} q(y) \leq e^{\beta t} (-q(y)' + \beta q(y)) \leq 0$$

On en déduit ? que $\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$ (car $q(y(0)) = q(x)$)

En particulier $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ exponentiellement dès que $q(x) < 2$

($\sqrt{q}$ est 1 norme)

rg C'est 1 cas où le Σ linéarisé a des prop qui sont conservés qd on revient au Σ de départ.