

Travaux Pratiques n°3

Équations

A. MARNAT

antoine.marnat@ens-cachan.org

MPSI.2 Lycée Champollion 2011/12

Exercice 1. Après avoir ouvert sa session et ouvert la présente feuille de TP située sur le réseau, lancer Maple et enregistrer la feuille de calcul (vierge) dans son répertoire personnel avec un titre explicite. Sortir feuilles de papier et stylos. Taper `restart`..

Le but de ce TP sera de se familiariser avec les différentes commandes comprenant le terme `solve` (qui vient de l'anglais solve=résoudre).

1 Équations algébriques

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $x^3 + x + 1 = 0$ et $x^9 - x^2 + 1 = 0$ à l'aide des fonctions `solve` et /ou `fsolve`.

Exercice 3. Résoudre l'équation $x^7 + x + 1 = 0$ sur $[-1, 1]$ à l'aide de la fonction `fsolve`. Soit a la solution renvoyée par Maple, évaluer $a^7 + a + 1$. Expliquer le résultat.

Exercice 4. Résoudre l'équation $\cos x = \frac{-1}{2}$ sur $[0, \pi[$ puis sur $\mathbb{R}$. On pourra modifier la valeur du paramètre `_EnvAllSolutions`.

Exercice 5. Calculer le millièmème terme de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $(a_0, a_1, a_2) = (2, 2 + i, 1 + \frac{i}{2})$ et $\forall n \geq 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$. On pourra utiliser la fonction `rsolve`.

Exercice 6. Résoudre l'équation diophantienne $7x + 5y = 13$. On pourra utiliser la commande `isolve`. Donner ensuite la forme des triplets pythagoriciens (i.e. solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$). Résoudre l'équation diophantienne $n^k = k^n$: Dans ce cas on atteint les limites de Maple, en effet on peut montrer qu'il existe une unique solution autre que les solutions "triviales" $n = k$, en l'occurrence $\{n, k\} = \{2, 4\}$.

2 Équations différentielles

Exercice 7. Définir l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante : $y'' + y = 0$ puis la résoudre à l'aide de la fonction `dsolve`. Résoudre maintenant l'équation différentielle avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$. Faire tracer le graphe de la solution sur un intervalle adéquate.

Exercice 8. Tout comme les équations algébriques, il existe de nombreuses équations différentielles que l'on ne sait pas résoudre explicitement. On peut dans certains cas obtenir une approximation de la fonction solution. Considérons l'équation du pendule pesant simple :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0, \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$$

où l est la longueur de la corde rigide, g le champ de la pesanteur et θ l'angle formé par la corde et la normale au sol. Résoudre numériquement cette équation avec la fonction `dsolve` et l'option `numeric`, puis représenter graphiquement la solution sur 60 secondes à l'aide de la fonction `odeplot`. Il faudra pour cela charger la bibliothèque `plots` à l'aide de la commande `with(plots)`. On prendra $\frac{g}{l} = 1\text{s}^{-2}$ et $\theta_0 = 45^\circ$.

Remarque : L'équation différentielle de l'exercice 6 est la version linéarisée de celle de l'exercice 7, valable pour les "petites oscillations".

Exercice 9. On considère les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y'' - 5y' + 6y = te^t$
2. $y'' - 5y' + 6y = te^{2t}$
3. $y'' - 2y' + y = ch(t)$
4. $y'' + y = t^2 \cos^2 t$

Dans chacun des cas précédents, résoudre l'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre, puis résoudre à l'aide de la fonction `dsolve` et tracer le graphe de plusieurs solutions.

Exercice 10. Soit l'équation $|x|y'(x) + y(x) = x^2 + 1$.

- Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. On pourra écrire les solutions comme des fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et dépendant respectivement des constantes C_1 et C_2 .
- Déterminer s'il existe une solution sur $\mathbb{R}$.
- Définir une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ pour des valeurs de C_1 et C_2 quelconques. On pourra utiliser la fonction `piecewise`.
- Tracer cette fonction pour des valeurs de C_1 et C_2 variant de -5 à 5 par pas de 1 . On pourra utiliser la fonction `seq`.