Travaux Pratiques n°5
Structures de donnée

A. MARNAT
antoine.marnat@ens-cachan.org

MPSI.2 Lycée Champollion 2011/12

Exercice 1. Après avoir ouvert sa session et ouvert la présente feuille de TP située sur le réseau, lancer Maple et enregistrer la feuille de calcul (vierge) dans son répertoire personnel avec un titre explicite. Sortir feuilles de papier et stylos. Taper `restart:`.

L'objet de ce TP est l'étude des structures de donnée suivantes : séquence, liste et ensemble.

1 Séquences

Une *séquence* `S` est tout simplement un groupement de plusieurs éléments séparés les uns des autres par des virgules. Une séquence peut admettre des doublons et est ordonnée. On mémorise une séquence dans une variable. Si `S` est une séquence, on a accès au $i^{\text{è}}$ élément par la commande `S[i]`, et au $i^{\text{è}}$ en partant de la fin par la commande `S[-i]`. Par contre, il n'est pas possible de connaître le nombre d'éléments !

Exercice 2. Déterminer l'utilité des commandes suivantes.
(Essayer si possible de prédire le résultat avant d'exécuter les commandes)

```
> S := 1, z, 6, X, alpha;
> whattype(S);
> S[1]; S[-2]; S[2..5];
> T := NULL;
> U := Y, 8, x, 3, pi;
> S,T,U;
> seq(1/i, i=1..7);
> nom$3; i^2$i=1..10;
```

Exercice 3. Construire la séquence `c` des cubes des entiers de 10 à 100. En extraire la séquence des cubes de 50 à 80.

Exercice 4. Construire la séquence des 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $a \in \mathbb{R}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = au_n$ pour $n \geq 1$. Donner ensuite la séquence des termes $u_{10}, u_{20}, u_{30}, \ldots, u_{100}$.

Exercice 5. Construire la séquence des $\cos(n)$, pour $n = 1, \ldots, 50$. Donner le maximum et le minimum (`max`, `min`).

2 Listes

La notion de *séquence* est hélas insuffisante. En effet, si l'on doit donner deux séquences en argument d'une procédure, comment savoir à quel endroit la première s'arrête et la seconde commence ? Une séquence de séquences est encore une séquence ... Une *liste* `L` est ainsi simplement une séquence entourée de crochets. Les opérations valables pour les éléments des séquences sont encore valables pour les listes, plus des fonctions spécifiques.

Exercice 6. Déterminer l'utilité des commandes suivantes.
(Essayer si possible de prédire le résultat avant d'exécuter les commandes)

```
> L := [1, 5, a, 8, 4, 3, s, X, 9, 78];
> whattype(L);
> L[2]; op(2, L);
> M:=[];
> nops(L);
> S := op(L); L:= [S];
> op(2..6, L); L[2..6];
> L := [2, 8, 4, 9, 11]; sort(L); sort(L, `>`);
> L := [2, 8, 4, z^2, x ]; convert(L,`*`); convert(L,`+`);
> L := [seq( i, i=5..50)]; N:= select( isprime, L); remove(isprime, L);
> L := [ op(L), 51];
> member(31, N);
> map( exp, L);
```

Exercice 7. Calculer le produit des nombres x^i pour $i = -3, -2, \ldots, 5$ à l'aide des commandes `seq` et `convert`.

Procéder de la même manière pour vérifier que la somme des coefficients binomiaux $\binom{10}{k}$ pour $k = 0, 1, \ldots, 10$ vaut 2^{10}. (`binomial`)

Exercice 8. Construire une fonction qui à une liste `L` associe la liste extraite des nombres pairs.

Exercice 9. Construire une fonction booléenne qui teste si une liste est triée.

Exercice 10. Créer la liste L des fractions de la forme $\frac{k\pi}{20}$ avec $0 \leq k \leq 20$ pour calculer une valeur approchée de $S = \frac{\pi}{20} \sum_{k=0}^{20} \sin(\frac{k\pi}{20})$.

3 Ensembles

La notion d'*ensemble* est par de nombreux aspects très différente de celles de séquence et de liste : il n'y a pas d'ordre, ni de doublon.

Exercice 11. Déterminer l'utilité des commandes suivantes.
(Essayer si possible de prédire le résultat avant d'exécuter les commandes)

```
> E := { a, 2, b,  5, a, c, 7 };
> whattype(E);
> E[4]; member( a, E);
> {}; convert( E, list)
> F := {b, c, d, f, e, h};
> E union F; E intersect F; E minus F;
> {2, 7, c} subset E;
```

Exercice 12. Soient $A = \{-1, 3, h, \mu\}$ et $B = \{x, g, h, m\}$. (on utilisera les commandes `cartprod` et `powerset` de la librairie `combinat`)

- Transformer $A \cup B$ en une liste d'éléments ordonnés.
- Déterminer le produit cartésien $A \times B$.
- Déterminer $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$. En déduire les ensembles qui sont inclus dans A et non inclus dans B.

Exercice 13. Soit $E = \{1, 2, \ldots, 30\}$ et $f : E \to E$, $n \mapsto n^2 - 3n + 7 \bmod 30$. Donner sous forme d'ensemble l'image réciproque par f de l'ensemble des nombres premiers.

Il existe d'autres structures de données, comme les chaînes de caractères (entre “guillemets”).

4 Applications

Exercice 14. Résolution d'équations différentielles

Lorsque l'on demande à Maple de résoudre une équation différentielle, il retourne une expression -ce qui n'est vraiment pratique à utiliser. Tester la commande `op` sur cette expression, et en déduire une façon efficace d'obtenir la fonction voulue.

Remarque On peut aussi utiliser les commandes `rhs` pour **r**ight **h**and **s**ide. (et `lhs`).

- On considère l'équation différentielle $y'(t) + 3y(t) = t^3 e^t$. Tracer à l'aide de la commande `seq` dans le même cadre $[-5, 5] \times [-5, 5]$ les graphes des solutions obtenues pour les valeurs $\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ et 2 de $y(0)$.
- On considère maintenant l'équation différentielle $y''(t) - y'(t) = t^2 cos(3t)$. Tracer dans le même cadre $[-10, 5] \times [-30, 30]$ les graphes des solutions qui satisfont aux conditions initiales suivantes : (trois graphes)
  1. $y'(0) = 0$ et $y(0) = 10, 5, 0, -5$ et -10.

2. $y(0) = 5$ et $y'(0) = 2, 1, 0, -1$ et -2.
3. $y(2) = 5$ et $y'(2) = 2, 1, 0, -1$ et -2.

Remarque : les graphes devront avoir titre, légende, couleurs, etc.

Exercice 15. Résolution d'équation récurrentes

À l'aide de la commande `rsolve`, calculer en fonction de n le terme u_n de la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$. Construire la liste des 40 premiers termes de la suite. (On pourra utiliser la commande `subs`)

Exercice 16. Arithmétique

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$, disons $n = 15977951$. Construire la liste de sa décomposition en base $b = 17$.

Exercice 17. Arithmétique'

Trouver tout les entiers compris entre 100 et 10000 qui sont à la fois un carré, et dans la suite $(4n + 17)_{n\in\mathbb{N}}$.