Mémoire de master
Leçon 234. Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Antoine Médoc, sous la direction de Paul Blochas

2021-2022

Abstract. This report is made as part of a master's degree in mathematics and correspond to one of the lesson of the *agrégation* of mathematics 2022. First, we introduce the Lebesgue integration. Then we describe some of the main theorems used to study convergence in this theory. Finally, we study the L^p spaces as normed vector spaces, with the example of the Hilbert space L^2.

Table des matières

1 Introduction

L'intégrale de Lebesgue, formalisée par Henri Lebesgue au début du XX^e siècle, généralise l'intégrale de Riemann (alors la plus utilisée). En "partitionnant l'espace d'arrivée", à la différence de la "partition de l'espace de départ" du point de vue de l'intégrale de Riemann, celle de Lebegue permet par exemple de donner un sens à l'intégrale de la fonction de Dirichlet (l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) sur un segment. Elle permet l'utilisation de nouveaux outils pour étudier la convergence de suites de fonctions et trouve des applications fondamentales en théorie des probabilités (par son lien avec la théorie de la mesure) et en théorie des distributions.

Ce mémoire consiste en la rédaction d'une proposition de plan pour la leçon 234 de l'agrégation externe de mathématiques 2022 intitulée *Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables*. On y présente les preuves de deux résultats choisis comme *développements* :

— le théorème de Fejér-Cesàro 4.16, qui montre la densité des polynômes trigonométriques dans les espaces L^p ;

— le théorème de Fourier-Plancherel 4.21, qui exploite la densité de l'espace de Schwartz dans l'espace de Hilbert L^2 pour étendre la transformée de Fourier de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ en une isométrie de l'espace L^2 tout entier.

Dans une première partie, on expose la construction de l'intégrale de Lebesgue 2. On commence par l'intégrale des fonctions positives 2.1, puis par celle des fonctions intégrables 2.2, et on compare enfin cette définition avec l'intégrale de Riemann 2.3. Ensuite, dans une deuxième partie, on présente quelques théorèmes fondamentaux de convergence 3. On commence par leurs énoncés 3.1, puis on en présente une application à l'étude des intégrales à paramètres 3.2. Enfin, dans une troisième partie, on étudie les espaces L^p 4. On commence par les voir comme des espaces de Banach 4.1, puis on s'intéresse au produit de convolution entre ces différents espaces 4.2 et on termine avec l'étude d'une isométrie de l'espace de Hilbert L^2 4.3.

◇ Notations. Ces notations et conventions seront valables dans toute la suite de la leçon.

— On note $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$. Tous les espaces topologiques T seront munis de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(T)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ et m la mesure de comptage sur $(X, \mathcal{A})$.

— Pour toute fonction f à valeurs réelles, on note f^+ (resp. f^-) sa partie positive (resp. négative). Pour toute fonction f à valeurs complexes, on note $\mathrm{Re} f$ (resp. $\mathrm{Im} f$) sa partie réelle (resp. imaginaire).

— Pour $I \subset \mathbb{K}$, on note $\mathcal{E}_I(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions étagées sur $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans I. On note $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions mesurables $(X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

— Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $0 \times \mu(A) = 0$ (même si $\mu(A) = +\infty$). Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{K} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $x \in X$, $0 \times f(x) = 0$.

2 Construction de l'intégrale de Lebesgue.

Dans cette première partie, on construit l'intégrale de Lebesgue de certaines fonctions d'un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{K}$. On les appelleras *fonctions intégrables*. On commence par définir celle des fonctions étagées positives, puis des fonctions mesurables positives, puis des fonctions à valeurs réelles et enfin des fonctions à valeurs complexes. On utilise notamment [BP12].

2.1 Intégrale des fonctions positives.

DÉFINITION 2.1. Soit $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ une fonction étagée positive. On définit son intégrale sur X par rapport à μ par

$$\int_X f\, d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\,.$$

▷ EXEMPLES. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une partition $\mathcal{A}$-mesurable de X, $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $f := \sum_{i=1}^n \alpha \mathbf{1}_{A_i}$. On a $\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$.
- Si $f = 0$ (la fonction nulle), $\int_X f\, d\mu = 0$.
- Soit $a \in X$ et δ_a la mesure de Dirac en a. Pour toute $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$, $\int_X f\, d\delta_a = f(a)$.
- Soit m la mesure de comptage sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Pour toute $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$, $\int_X f\, dm = \sum_{x \in X} f(x)$.

On retrouve rapidement les propriétés basiques attendues pour une intégrale.

PROPOSITIONS 2.2. Soient $f, g \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$.
1. Additivité : $\int_X f + g\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$.
2. Croissance : si $f \leqslant g$, $\int_X f\, d\mu \leqslant \int_X g\, d\mu$.
3. Positive homogénéité : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\int_X \lambda f\, d\mu = \lambda \int_X f\, d\mu$.

On cherche maintenant à utiliser cette définition, simple, pour définir l'intégrale d'une fonction mesurable. Dans le reste de cette sous-partie 2.1 on présente des outils utiles pour la sous-partie 2.2.

On considérera souvent des intégrales sur des sous-ensembles mesurables de X.

DÉFINITION 2.3. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$. On a $\mathbf{1}_A f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ et on définit l'*intégrale de f sur A* par

$$\int_A f\, d\mu := \int_X \mathbf{1}_A f\, d\mu.$$

Le lemme suivant donne les premiers outils utiles pour les manipuler. Le deuxième point est le premier résultat de convergence d'intégrales que nous voyons dans cette leçon. La partie 3 est consacrée à ce type de propriétés.

LEMME 2.4.
1. Théorème de Chasles : pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, pour toute $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$,
$$\int_{A \cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu.$$
2. Soit $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ croissante (pour l'inclusion) recouvrant X. Pour toute $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$,
$$\int_{E_n} f\, d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_X f\, d\mu.$$

De la même façon que nous construisons l'intégrale des fonctions réglées positives dans la théorie de Riemann, nous définissons ci-dessous l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives.

Définition 2.5. Soit $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. L'ensemble $\{\int_X \varphi \, d\mu \; ; \; \varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})\}$ est non vide et inclus dans $\mathbb{R}_+$. On définit l'*intégrale de f sur X* par

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu \; ; \; \varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A}) \right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

On dit que f est *intégrable* sur X si $\int_X f \, d\mu < +\infty$.

◇ Remarques. — Si $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$, les définitions 2.1 et 2.5 coïncident.
— La croissance de l'intégrale pour les fonctions étagées positives nous donne directement la croissance de l'intégrale pour les fonctions mesurables positives : pour toutes $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, $f \leqslant g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu$.

Citons à présent l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Théorème 2.6 *(Théorème de Beppo Levi).* (1906)
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$ croissante. La fonction $f := \lim_{n \to +\infty} f_n$ est bien définie, mesurable et positive. On a

$$\int_X f_n \, d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, d\mu.$$

Le lemme fondamental d'approximation d'une fonction mesurable par des fonctions étagées (théorème 5.1 de [BP12]) permet de mettre en pratique le théorème de Beppo Levi. Par exemple, il permet d'étendre les propositions 2.2 aux fonctions mesurables positives : l'intégrale de Lebesgue vérifie l'additivité et la positive homogénéité sur $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

Remarquons que la valeur de l'intégrale d'une fonction nous donne des informations sur la mesure d'ensembles où elle prend certaines valeurs.

Propositions 2.7. Soit $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$.

1. L'intégrale de f sur X est nulle si et seulement si f est nulle presque partout.
2. (Inégalité de Markov) Pour tout $\alpha > 0$,

$$\mu(\{f \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_X f \, d\mu.$$

3. Si f est μ-intégrable, $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Corollaire 2.8. Soient $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ telles que $f = g$ presque partout. On a $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

▷ Exemple. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle positive. On définit son espérance par $\mathbb{E}(Y) := \int_\Omega Y \, d\mathbb{P}$. Pour tout $\alpha > 0$, l'inégalité de Markov s'écrit

$$\mathbb{P}(\{Y \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(Y).$$

▷ Exemple. Supposons que $(X, \mathcal{A}) := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Soit m la mesure de comptage définie sur $(X, \mathcal{A})$. L'ensemble des fonctions positives mesurables est ici $\mathcal{M}^+(\mathcal{A}) = (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. De plus, pour toute suite $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ notée u,

$$\int_X u \, dm = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Cet exemple nous permet de montrer facilement que la réciproque de la deuxième proposition 2.7 est fausse : la fonction $f := \left(\frac{1}{n+1}\right)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ est finie partout mais $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = +\infty$.

◇ Remarque. Ces deux derniers exemples, celui d'une variable aléatoire et celui d'une suite numérique, sont remarquables : les résultats les plus généraux sur l'intégration de Lebesgue pourront s'y appliquer. Ce lien n'est traditionnellement pas fait en utilisant l'intégrale de Riemann.

2.2 Fonctions intégrables.

Dans cette sous-partie, nous définissons enfin l'intégrale de Lebesgue pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 2.9. Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ mesurable est *μ-intégrable* si $|f|$ est μ-intégrable. On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ μ-intégrables.

◇ Remarques.
— Pour une fonction $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, les définitions 2.5 et 2.9 coïncident.
— Soient $f, g : X \to \mathbb{K}$ mesurables égales presque partout. Par le corollaire 2.8, f est intégrable si, et seulement si, g est intégrable.

On cherche maintenant à définir l'intégrale d'une fonction intégrable, qui peut prendre des valeurs complexes. Pour cela, nous exploiterons les liens entre les parties positive et négative d'une fonction réelle et cette même fonction ainsi que les liens entre les parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe et cette même fonction.

Lemme 2.10.
1. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable réelle. La fonction f est intégrable si, et seulement si, $f^+ : X \to \mathbb{R}_+$ et $f^- : X \to \mathbb{R}_+$ sont intégrables.
2. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable complexe. La fonction f est intégrable si, et seulement si, $\mathrm{Re} f : X \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im} f : X \to \mathbb{R}$ sont intégrables.

Définitions 2.11.
— Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. On définit son intégrale sur X par

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

— Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. On définit son intégrale sur X par

$$\int_X f \, d\mu := \int_X \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im} f \, d\mu \in \mathbb{C}.$$

◇ Remarques.
— Pour toute fonction de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, les deux définitions 2.11 coïncident. Pour toute fonction de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, les définitions 2.11 et 2.5 coïncident.
— Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ égales presque partout. Leurs intégrales sur X sont égales.

▷ Exemple. Supposons $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Soit m la mesure de comptage sur cet espace mesurable. On note $\ell^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(m)$. L'ensemble

$$\ell^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{N} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty \right\}$$

correspond à l'ensemble des séries numériques absolument convergentes.

L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ possède une structure d'espace vectoriel, contrairement à l'ensemble des fonctions étagées positives ou à l'ensemble des fonctions mesurables positives.

Propositions 2.12 *(Structure d'espace vectoriel des fonctions intégrables).*

1. L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^X$.
2. L'application $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) \mapsto \int_X f \, d\mu \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire positive. En particulier, elle est croissante.
3. L'appplication $||\cdot||_1 : f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) \mapsto \int_X f \, d\mu \in \mathbb{K}$ est une semi-norme. Son noyau $||\cdot||_1^{-1}(\{0\})$ est le sous-espace vectoriel F_0 des fonctions intégrables nulles presque partout.

◇ Remarque. Cette dernière proposition nous incite à considérer l'espace vectoriel quotient $\mathrm{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)/F_0$. Nous l'étudierons notamment dans la partie.

Propositions 2.13 *(Inégalité triangulaire).* Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.

1. On a $|\int_X f \, d\mu| \leqslant \int_X |f| \, d\mu$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $|\int_X f \, d\mu| = \int_X |f| \, d\mu$ si, et seulement si, f est de signe constant.
   Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $|\int_X f \, d\mu| = \int_X |f| \, d\mu$ si, et seulement si, f a un argument constant.

Donnons, pour conclure cette partie, un énoncé du théorème de changement de variables. On considèrera la mesure image de la mesure de Lebesgue λ par une fonction suffisamment régulière.

Théorème 2.14 *(de changement de variables).* Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On note $J_\varphi : U \to \mathbb{R}$ le déterminant de sa jacobienne.

— Pour toute fonction $f : V \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U f \circ \varphi \times |J_\varphi| \, d\lambda \leqslant +\infty.$$

— Pour toute fonction $f : V \to \mathbb{K}$ mesurable, f est intégrable si, et seulement si, $f \circ \varphi \times |J_\varphi|$ est intégrable. De plus, si f est intégrable,

$$\int_V f \, d\lambda = \int_U f \circ \varphi \times |J_\varphi| \, d\lambda.$$

◇ Remarques. — Remarquons qu'il est nécessaire que la fonction de changement de variable soit un difféomorphisme, contrairement au changement de variable classique de l'intégrale de Riemann sur un segment de $\mathbb{R}$.

— Remarquons également que ce théorème ne considère que des intégrales sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Cependant, on considère souvent des intégrales de Lesbesgue sur un fermé F de $\mathbb{R}^n$. L'une des méthodes classiques pour effectuer un changement de variable est alors de trouver un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ tel que $F = \overline{V}$ et $\lambda(F \backslash V) = 0$. Les intégrales sur V et F sont alors égales, et l'on peut appliquer le théorème de changement de variables 2.14 sur l'ouvert V.

▷ Exemple. Les changements de variables *polaires* et *sphériques* sont souvent utilisés (notamment en physique). Nous en donnerons une application pour calculer l'intégrale de Gauss après le théorème de Fubini-Tonelli 3.5.

2.3 Liens avec l'intégrale de Riemann.

Avec les mesures de probabilité et la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ est celle qui nous intéresse le plus. Dans ce cas, on considère des intégrales sur la droite réelle, et cela nous pousse à comparer l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann. Nous expliquons dans le théorème suivant en quoi l'intégrale de Lebesgue "généralise" celle de Riemann.

THÉORÈME 2.15. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment compact de $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue sur le segment I. On note $\mathfrak{R}(I, \mathbb{K})$ les fonctions $I \to \mathbb{K}$ intégrables au sens de Riemann.

1. Soit $f \in \mathfrak{R}(I, \mathbb{K})$. Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ λ-presque partout égale à f telle que $\int_a^b f(x)\, dx = \int_I f\, d\lambda$.
2. Soit $\overline{\mathcal{B}(I)}$ la tribu de Lebesgue, i.e. la tribu $\mathcal{B}(I)$ complétée des ensembles négligeables. On a $\mathfrak{R}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}\left(I, \overline{\mathcal{B}(I)}, \lambda\right)$.

◇ REMARQUES.
- — En particulier, les fonctions réglées et intégrables au sens de Riemann sur un segment compact I de $\mathbb{R}$ sont intégrable au sens de Lebesgue pour $(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ et ces deux intégrales coïncident. En utilisant l'axiome du choix, on peut cependant montrer qu'il existe des élements non mesurables de $\mathfrak{R}(I, \mathbb{K})$.
- — Pour manipuler l'intégrale d'une fonction suffisamment régulière (par exemple continue) on peut donc utiliser tous les outils déjà connus sur l'intégrale au sens de Riemann.

▷ EXEMPLE. Soit $f := \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann, mais elle est mesurable et on a $\int_{[0,1]} f\, d\lambda = \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$.

3 Théorèmes de convergence.

On a déjà vu le théorème de Beppo Levi 2.6, parfois appelé théorème de la convergence monotone. Dans cette partie, on développe de nouveaux outils pour étudier la convergence de suites d'intégrales et la permutation de limites de d'intégrales. On utilise notamment [BP12].

3.1 Le théorème de convergence dominée.

THÉORÈME 3.1 *(Lemme de Fatou).* (1907)
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$. On a

$$0 \leqslant \int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

▷ EXEMPLES.
- — On considère l'espace mesurable $([0, 2], \mathcal{B}([0, 2]))$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $f_{2n} := \mathbf{1}_{[0,1]}$ et $f_{2n+1} := \mathbf{1}_{]1,2]}$. La suite $(f_n)_n$ est bien une suite de fonctions mesurables positives. La fonction $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ est nulle et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{[0,2]} f_n\, d\mu = 1$. L'inégalité donnée par le lemme de Fatou est donc $0 \leqslant 1$. En particulier, on constate que cette inégalité peut être stricte.
- — Soit $(f_n)_n \in \mathcal{L}^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement presque partout. On suppose que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$. Par le lemme de Fatou, la fonction limite est intégrable.
- — Supposons $\mu(X) > 0$. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ presque partout. Par le lemme de Fatou, la suite d'intégrales $\left(\int_X f_n\, d\mu\right)_n$ diverge vers $+\infty$.

Application 3.2. On considère λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante (dérivable presque partout dans $[0,1]$). Elle est intégrable au sens de Riemann et
$$\int_0^1 f \leqslant f(1) - f(0).$$

Nous donnons maintenant l'un des théorèmes les plus utilisés en pratique pour étudier des problèmes de convergence de suites d'intégrales.

Théorème 3.3 *(de convergence dominée).* Soit $(f_n)_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que $(f_n(x))_n$ converge presque partout. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ presque partout. Il existe $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que $(f_n)_n$ converge presque partout vers f et
$$\int_X |f_n - f| \; d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

◇ Remarques. — Reprenons les notations du théorème 3.3. En pratique, la fonction f est connue en étudiant la convergence presque partout de la suite $(f_n)_n$. Elle est intégrable par l'hypothèse de domination (par la fonction g). De plus, on utilise le plus souvent une conclusion plus faible que celle du théorème :
$$\int_X f_n \; d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X f \; d\mu.$$

— Plaçons nous dans le cadre d'application du théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale de Riemann : soit I un segment (compact) de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers une fonction notée $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. La suite $(||f_n||_\infty)_n$ est convergente, donc bornée. On peut alors noter $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty$. La suite $(f_n)_n$ est ainsi dominée par la fonction constante intégrable $x \in I \mapsto C \in \mathbb{R}_+$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

▷ Exemples. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n \in \mathbb{R}$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f : x \in [0,1] \mapsto \mathbf{1}_{\{1\}(x)\in\mathbb{R}}$ mais ne converge pas uniformément. Or elle est dominée par la fonction intégrable constante égale à 1. On ne peut donc pas appliquer le théorème usuel d'interversion de la limite et de l'intégrale de Riemann mais on peut appliquer le théorème de convergence dominée :
$$\int_0^1 x^n \; dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

— Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ positive telle que $\operatorname{supp} f \subset]0,1[$ et $\int_{\mathbb{R}} f > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{f(x+n)}{n} \in \mathbb{R}$ (la *bosse glissante*). La suite de fonctions continues $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. De plus, par changement de variable,
$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Cependant, on peut montrer que l'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée n'est pas vérifiée. Soit g une fonction intégrable dominant la suite $(f_n)_n$. Elle domine donc $h := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n|$ donc h est intégrable. Or les fonctions de la suite $(f_n)_n$ sont à support deux à deux disjoints, donc $\int_{\mathbb{R}} h \; d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \; d\lambda$. Ainsi, par le théorème de Beppo Levi 2.6, $\int_{\mathbb{R}} h \; d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 f_n = +\infty$. On en déduit que dans cette situation le théorème de convergence dominée ne peut pas s'appliquer. Cependant, on a bien justifié l'interversion de la limite et de l'intégrale.

3.2 Application : étude des intégrales à paramètres.

Les fonctions définies par des intégrales à paramètres apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes. Leur étude est fondamentale en analyse de Fourier, pour définir la fonction Γ d'Euler, ou encore pour s'intéresser au potentiel du champ de gravitation dans l'espace. On donne ici quelques exemples de théorèmes applicables dans le cadre de l'intégration de Lebesgue. On utilise notamment [QZ20] et [BP12].

Tout d'abord, la caractérisation séquentielle de la continuité nous permet d'utiliser le théorème de convergence dominée 3.3 pour étudier la régularité d'intégrales à paramètre.

Théorème 3.4 *(Théorème de dérivation sous le signe intégral).* Soit E un espace métrique et $f : E \times X \to \mathbb{K}$ telle que

— pour tout $t \in E$, $f(t, \cdot)$ est mesurable ;

— pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est continue ;

— pour tout compact K de E, il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que, presque pour tout $x \in X$, pour tout $t \in K$, $|f(t, x)| \leqslant g(x)$.

La fonction

$$F : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \int_X f(t,x)\, d\mu(x) \end{array} \right.$$

est bien définie et continue.

▷ Exemples. — La fonction $\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \in \mathbb{C}$ est bien définie et continue.

— Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Sa *transformée de Fourier* $\hat{f} : u \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\, df(x) \in \lambda(x)$ est bien définie et continue.

— Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ bornée. Le *produit de convolution* $f * g : u \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(u - x) f(x)\, d\lambda(x) \in \mathbb{K}$ est bien défini et continu.

◇ Remarque. Il existe également des théorèmes semblables pour étudier le caractère $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}$) d'une intégrale à paramètre et son holomorphie. Nous verrons une application de la dérivation sous le signe intégral dans la preuve du lemme 4.19.

Ensuite, dans le cas d'une intégrale sur une mesure produit, on peut s'interroger sur "l'ordre d'intégration". Usuellement, on utilise deux théorèmes dits *de Fubini* : l'un pour les fonctions positives, le deuxième pour les fonctions intégrables. Le premier, donné cidessus, est une conséquence du théorème de Beppo Levi 2.6. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On considère $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la tribu produit sur $X \times Y$ et $\mu \otimes \nu$ la mesure produit sur cet espace mesurable.

Théorème 3.5 *(de Fubini-Tonelli).* (1907)

Soit $f : X \times Y \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction mesurable. La fonction f_X (resp. f_Y) définie pour presque tout $x \in X$ (resp. $y \in Y$) par $f_X(x) = \int_Y f(x, \cdot)\, d\nu$ (resp. $f_Y(y) = \int_X f(\cdot, y)\, d\mu$) est mesurable et on a

$$\int_{X \times Y} f\, d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

▷ Exemple. Calculons l'intégrale de Gauss $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$. Le théorème de Fubini-Tonelli 3.5 permet d'exprimer le produit d'intégrales I^2 comme une intégrale sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On ne change pas sa valeur en ne la considérant que sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\})$. Un changement de variables polaires (voir le théorème 2.14) et une nouvelle application du théorème de Fubini-Tonelli permet alors de trouver $I^2 = \pi$, d'où $I = \sqrt{\pi}$.

Théorème 3.6 *(de Fubini-Lebesgue).* (1907)
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu \otimes \nu)$. On a
— pour presque tout $x \in X$ (resp. $y \in Y$), $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$ (resp. $f(\cdot,y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$) ;
— la fonction f_X (resp. f_Y) définie pour presque tout $x \in X$ (resp. $y \in Y$) par $f_X(x) = \int_Y f(x,\cdot)\, d\nu$ (resp. $f_Y(y) = \int_X f(\cdot,y)\, d\mu$) est intégrable ;
— la formule

$$\int_{X\times Y} f\, d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, \nu(dy)\right)\, \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, \mu(dx)\right)\, \nu(dy).$$

◇ Remarques. — Le théorème de Fubini-Tonelli 3.5 permet, en étudiant la valeur absolue d'une fonction, de montrer que celle-ci est intégrable. On peut ensuite appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue 3.6 pour "intégrer dans l'ordre souhaité".
— Il est important de vérifier que les deux mesures μ et ν des théorèmes de Fubini sont σ-finies. Cela est notamment le cas pour la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ou de la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Cependant, la mesure de comptage sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$ n'est pas σ-finie.

▷ Exemple. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1] \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy} \in \mathbb{R}$. Celle-ci est continue, donc mesurable. La mesure de Lebesgue est σ-finie sur $\mathbb{R}_+$ et $[0,1]$. Pour tout $y \in]0,1]$, $\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\, dx = 0$. De plus, pour tout $x > 0$, $\int_{[0,1]} f(x,y)\, dy = \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$. La fonction nulle et $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \in \mathbb{R}$ sont intégrables et on a

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\, dx\right) dy = 0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\, dy\right) dx.$$

L'hypothèse ici mise en défaut pour appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue est l'intégrabilité de f.

4 Espaces $\mathbf{L}^p$.

4.1 Comme espaces vectoriels normés.

Dans les propositions 2.12, nous avons vu que l'espace de fonctions intégrables $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un espace vectoriel muni d'une semi-norme naturelle. On utilise notamment [BP12].
Soit $p \in [0, +\infty]$. On suppose que $\mu(X) > 0$.

Définitions 4.1. — Soit $p \in [0, +\infty[$. On définit l'espace

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}) \mid f \text{ mesurable et } \int_X |f|^p\ d\mu < +\infty \right\}$$

et l'application

$$||\cdot||_p : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & (\int_X |f|^p\ d\mu)^{1/p} \end{array} \right. .$$

— On définit

$$\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \mid f \text{ mesurable et } \exists M > 0, \mu(\{f > M\}) = 0\}$$

et l'application

$$\left\|\cdot\right\|_\infty : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \inf\left\{M>0 \mid \mu(\{f>0\})=0\right\} \end{array} \right. .$$

De même que précédemment, on se permettra d'alléger cette notation lorsque le contexte est clair, par exemple $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ ou $\mathcal{L}^p$.

◇ Remarques. — Cette nouvelle notation est bien cohérente avec la notation $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu$ introduite à la définition 2.9.

— Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}(U,\mathbb{K})$. On a $f \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(U,\mathcal{B}(U),\lambda)$ et $\left\|f\right\|_\infty = \sup_{x\in U}|f(x)|$. Ainsi, la notation $\left\|\cdot\right\|_\infty$ est bien cohérente avec la norme de la convergence uniforme pour les fonctions continues.

▷ Exemple. Pour tout $p \in [1,+\infty[$,

$$\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m) = \left\{(a_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^p < +\infty\right\}.$$

Propositions 4.2. — L'espace de fonctions $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— Si X est de mesure finie, pour tout $q \geqslant p$ on a $\mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu)$.

— Pour tout $q \geqslant p$, $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subset \ell^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

▷ Exemple. Remarquons que

$$\frac{\mathbf{1}_{]0,1]}}{\sqrt{\cdot}} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)\backslash\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\lambda) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2+1}} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\lambda)\backslash\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda).$$

L'inégalité de Young nous permet de montrer l'inégalité fondamentale suivante.

Théorème 4.3 *(Inégalité de Hölder).* Soient $p,q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Soient $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.

— La fonction fg est intégrable et

$$\left\|fg\right\|_1 \leqslant \left\|f\right\|_p \left\|g\right\|_q .$$

— Suppposons $p,q < +\infty$. On a $\left\|fg\right\|_1 = \left\|f\right\|_p \left\|g\right\|_q$ si, et seulement si, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha\,|f|^p = \beta\,|g|^q$ presque partout.

Corollaire 4.4 *(Inégalité de Minkowski).* Soit $p \in [1,+\infty]$. L'espace $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), \left\|\cdot\right\|_p)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel semi-normé.

On ne s'intéresse maintenant qu'au cas où $p \geqslant 1$.

Lemme 4.5. Pour toute $f \in \mathcal{L}^p$, $\left\|f\right\|_p = 0$ si, et seulement si, $f=0$ presque partout. L'ensemble $\{f \in \mathcal{L}^p \mid f=0 \text{ presque partout}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p$.

Définition 4.6. Soit $p \in [1,+\infty]$. On note $(\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu), \left\|\cdot\right\|_p)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé canoniquement associé au $\mathbb{K}$-espace vectoriel semi-normé $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu), \left\|\cdot\right\|_p)$.

◇ Remarques. — L'espace vectoriel $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu)$ est l'espace vectoriel quotient

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu)/\left\{f \in \mathcal{L}^p \mid f=0 \text{ presque partout}\right\}.$$

Soit $f \in \mathcal{L}^p$ et $\bar{f} \in \mathrm{L}^p$ sa classe d'équivalence. Pour toute $g \in \bar{f}$, $g = f$ presque partout. Si $p < +\infty$, $\left|\left|\bar{f}\right|\right|_p = (\int_X |f|^p \ d\mu)^{1/p}$. Si $p = +\infty$, $\left|\left|\bar{f}\right|\right|_p = \inf \{M > 0 \mid \mu(\{f > M\}) = 0\}$.

— On utilise l'abus de langage consistant à dire que $g \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ vérifie une propriété si l'un de ses représentant la vérifie.

▷ Exemple. Supposons que le seul élément négligeable de $\mathcal{A}$ soit l'ensemble vide. Chaque élément de L^p est une classe d'équivalence avec un unique élément. Par abus de langage, les ensembles L^p et $\mathcal{L}^p$ coïncident. La mesure de comptage est un exemple d'une telle situation, et on écrira $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m) = \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

Théorème 4.7 *(Théorème de Riesz-Fischer).* Soit $p \in [1, +\infty]$.

1. L'espace $(\mathrm{L}^p(X, \mu), ||\cdot||_p)$ est complet.
2. Toute suite de $(\mathrm{L}^p(X, \mu), ||\cdot||_p)$ convergente admet une sous-suite presque-partout convergente.

Nous avons donc construit des espaces de Banach naturellement associés à la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Nous donnons maintenant un critère pratique pour vérifier la convergence d'une suite dans ces espaces L^p. Celui-ci découle d'une application direct du lemme de Fatou 3.1 et du théorème de convergence dominée 3.3.

Propositions 4.8 *(Convergence L^p-dominée).* Soit $p \in [1, +\infty]$, $(f_n)_n \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $f \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}{}^p(\mu)$ telles que $(f_n)_n$ converge presque partout vers f.

— Si la suite $(f_n)_n$ est bornée, $f \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

— Soit $g \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ presque partout. La fonction f est un élément de $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $(f_n)_n$ converge vers f dans cet espace normé.

Il existe de nombreux espaces de fonctions intéressants (de par la régularité de leurs éléments) denses dans les espaces L^p. Nous en donnons deux premiers exemples ci-dessous.

Théorème 4.9. Soit $p \in [1, +\infty[$. L'ensemble des fonctions en escalier à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ et l'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ sont denses dans $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

▷ Exemple. L'adhérence de l'ensemble $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ dans $\mathrm{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est l'ensemble des fonctions continues convergeant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Nous remarquons ici une première différence fondamentale entre le "cas p fini" et le "cas p infini".

Dans la sous-partie suivante, nous introduisons un outil très utile pour affiner ces résultats de densité.

4.2 Le produit de convolution.

Nous nous plaçons ici dans le cas $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. La convolution est une opération fondamentale sur les espaces L^p définis dans la sous-partie précédente. L'une de ses applications est la régularisation de fonctions en réalisant une moyenne pondérée autour de chaque point de la droite réelle. Nous utilisons notamment [BMP05].

Définition 4.10. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mesurables et $x \in \mathbb{R}$ tels que $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)g(x-t) \in$

$\mathbb{R}$ est intégrable. On définit le *produit de convolution* de f par g en x par

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt \in \mathbb{K}.$$

Une application directe du théorème de changement de variables 2.14 est le lemme suivant.

LEMME 4.11. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mesurables et $x \in \mathbb{R}$ tels que $(f * g)(x)$ est bien défini. Le produit de convolution $(g * f)(x)$ est bien défini et $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

Le théorème de Fubini-Lebesgue 3.6 nous permet de voir le produit de convolution comme une opération sur l'espace L^1.

PROPOSITIONS 4.12.
1. Soient $f, g \in \mathrm{L}^1$. Le produit de convolution $f*g$ est bien défini presque partout et définit alors un élément de L^1 tel que $||f * g||_1 \leqslant ||f||_1\, ||g||_1$.
2. La structure $(\mathrm{L}^1, +, *, \cdot, ||\cdot||_1)$ est une algèbre normée sous-multiplicative sans élément neutre.

▷ EXEMPLE. Pour toutes $f, g \in \mathrm{L}^1$, $\widehat{(f * g)} = \hat{f}\hat{g}$.

Remarquons que la "convolution L^1-L^1" est bien définie et conserve l'intégrabilité, mais n'apporte pas de régularité.

THÉORÈME 4.13. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$.
— Le produit de convolution $f * g$ est bien défini sur $\mathbb{R}$, est borné et uniformément continu.
— Si $p, q < +\infty$, $f * g$ converge vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

◇ REMARQUE. Le théorème de convergence dominée 3.3 permet de montrer que le produit de convolution avec une fonction suffisamment régulière permet d'obtenir une fonction dérivable. Cela est notamment utile pour prouver la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans les espaces $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ avec $p \in]1, +\infty[$. Pour cela, on introduit souvent la notion d'approximation de l'unité. Dans cette leçon, nous choisissons de nous concentrer sur l'espace des polynômes trigonométriques.

Nous allons utiliser le produit de convolution pour montrer la densité des polynômes trigonométriques dans les espaces L^p, énoncée au corollaire 4.17. Tout d'abord, plaçons-nous dans un cadre un peu différent.

◇ NOTATIONS. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques. Pour tout $p \in [1, +\infty[$ on note $\mathrm{L}^p_{2\pi}$ l'ensemble $\left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique et } \int_{[0,2\pi]} |f|^p\, d\lambda < +\infty\right\}$ et, pour toute $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$,

$$||f||_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p}.$$

Soit $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{inx} \in \mathbb{C}$ et $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(x)e^{-inx}\, \lambda(dx)$ le n-ième coefficient de Fourier de f. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N(f) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$ la N-ième somme partielle de Fourier de f et $\sigma_N(f)$ la moyenne de Cesàro $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$.

◇ REMARQUE. Soit $p \in [1, +\infty[$. On déduit les propositions suivantes des résultats déjà exposés sur l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Les espaces $(\mathcal{C}_{2\pi}, ||\cdot||_\infty)$ et $(\mathrm{L}^p_{2\pi}, ||\cdot||_p)$ sont de Banach et, pour tout $q \geqslant p$,

$$\mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathrm{L}^q_{2\pi} \subset \mathrm{L}^q_{2\pi}.$$

Les preuves du théorème 4.14, du lemme 4.15, du théorème 4.16 et du corollaire 4.17 constituent le second développement de cette leçon.

Théorème 4.14 *(de Fejér).* (1900) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. On a

$$\sigma_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{||\cdot||_\infty} f$$

et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $||\sigma_N(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty$.

Preuve (Tirée de [Cha19])
Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on note $D_N := \sum_{n=-N}^{N} e_n$ le noyau de Dirichlet d'ordre N. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $K_N := \frac{1}{N}\sum_{j=O}^{N-1} D_n$ le noyau de Fejér d'ordre N. On rappelle que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N = 1$ et, par ailleurs, que K_N est l'unique prolongement par continuité de la fonction

$$x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \in \mathbb{R}_+$$

sur $\mathbb{R}$. Ainsi K_N est positive et, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in [-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$, $K_N(x) \leqslant \frac{1}{N\sin(\varepsilon/2)^2}$. On en déduit en particulier que $||K_N||_1 = 1$. On utilise cette dernière égalité dans le calcul suivant : $||\sigma_N(f)||_\infty = ||f * K_N||_\infty \leqslant ||f||_\infty ||K_N||_1 = ||f||_\infty$.
Montrons finalement la convergence uniforme annoncée. Soit $\delta > 0$ et

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(u) - f(v)| \ ; \ |u - v| \leqslant \delta\}$$

le module d'uniforme continuité de f évalué en δ. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $|f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|\leqslant\delta} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\, dt + \int_{|t|>\delta} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\, dt\right) \leqslant \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} K_N(t)\, dt + 2\,||f||_\infty \int_{|t|>\delta} K_N(t)\, dt \leqslant \omega(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{N\sin(\delta/2)^2}$. On en déduit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $||f - \sigma_N(f)||_\infty \leqslant \omega(\delta) + \frac{2||f||_\infty}{N\sin(\delta/2)^2}$. Donc, pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{N\to+\infty} ||f - \sigma_N(f)||_\infty \leqslant \omega(\delta).$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique donc, par le théorème de Heine, elle est uniformément continue. Ainsi $\omega(\delta) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par l'inégalité précédente, $\limsup_{N\to+\infty} ||f - \sigma_N(f)||_\infty = 0$ donc $(\sigma_N(f))_N$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. □

Avant de prouver le théorème de Fejér-Lebesgue 4.16, nous énonçons un dernier lemme.

Lemme 4.15 *(Uniforme continuité de l'opérateur translation.).* Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note $\tau_a(f) := f(\cdot - t)$ la translation de f par t. L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \tau_t(f) \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ est uniformément continue.

Développement 4.16 *(Théorème de Fejér-Lebesgue).*
Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$. On a

$$\sigma_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{||\cdot||_p} f$$

et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $||\sigma_N(f)||_p \leqslant ||f||_p$.

Preuve (Tirée de [Cha19])
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|\sigma_n(f)(x)|^p = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{K_n(t)}{2\pi} \right|^p$$

donc, par inégalité triangulaire et l'inégalité de Hölder 4.3 (avec p et son exposant conjugué), $|\sigma_n(f)(x)|^p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_n(t)\ dt \times 1$. Ainsi on a, par le théorème de Fubini-Tonelli 3.5, $||\sigma_n(f)||_p^p \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p\ \ dx\ dt$ d'où, par périodicité de f, $||\sigma_n(f)||_p^p \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\ \ dx\ dt = ||K_n||_1\, ||f||_p^p = ||f||_p^p$. On a donc montré l'inégalité annoncée.

Montrons la convergence en moyenne annoncée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_n(t)$. Avec $g : t \in \mathbb{R} \mapsto ||f - \tau_{-t} f||_p^p \in \mathbb{R}_+$, on a donc $||\sigma_n(f) - f||_p^p \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) g(-t)\ dt = (g * K_n)(0) = \sigma_n(g)(0)$. Or, par le lemme 4.15, g est continue. Par périodicité de f, on a donc $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$. On peut donc appliquer le théorème de Fejér 4.14 et en déduire que $\sigma_n(g)(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(0) = 0$. Finalement, $||\sigma_n(f) - f||_p^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 4.17. Soit $p \in [1, +\infty[$. L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $(\mathrm{L}^p_{2\pi}, ||\cdot||_p)$.

Preuve Pour tous $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n(f)$ est un polynôme trigonométrique. □

4.3 L'espace de Hilbert L^2.

Terminons cette leçon en étudiant le cas particulier de l'espace de Banach $\mathrm{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu)$, que l'on peut naturellement munir d'une structure Hilbertienne. Nous utilisons notamment [BP12].

◇ Notation. On définit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_X f\bar{g}\ d\mu \end{array} \right. .$$

Proposition 4.18. L'espace $(\mathrm{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

▷ Exemples.
— Par le corollaire 4.17, $\{e_n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base Hilbertienne de $\mathrm{L}^2_{2\pi}$. En particulier, celui-ci est séparable.
— Tout $\mathbb{K}$-espace de Hilbert séparable est isomorphe à l'espace de Hilbert $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ par l'isométrie associant à un vecteur sa décomposition dans une base Hilbertienne.

Le théorème 4.21 est un résultat fondamental concernant la transformation de Fourier et l'espace normé L^2. Sa preuve, ainsi que celle du lemme 4.19, constitue le second développement de cette leçon.

Lemme 4.19.
1. La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même.
2. Pour toutes $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g.$$

3. Pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathrm{L}^2$ et
$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi} \left|\left|\hat{f}\right|\right|_2^2.$$

Preuve 1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La fonction f est intégrable, donc on peut considérer sa transformée de Fourier. On cherche à montrer que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Soit $h : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-ixt} f(t) \in \mathbb{R}$. On cherche à appliquer le théorème 3.4 de dérivation sous le signe intégral à cette fonction. La fonction f est continue donc h est continue. De plus f est intégrable donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x,\cdot)$ est intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $h(\cdot,t)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $h(\cdot,t)^{(n)} : x \in \mathbb{R} \mapsto (-it)^n e^{-ixt} f(t) \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout (x,t), $\left|(-it)^n e^{-ixt} f(t)\right| = |t^n f(t)|$. Or $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R} \mapsto t^n f(t) \in \mathbb{R}$ est intégrable. Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^k e^{-ixt} f(t) dt.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par des polynômes et par dérivation donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e^{-ixt} \left(s \mapsto (-is)^n f(s)\right)^{(n)}(t) \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, comme les fonctions considérées sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$, on montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ (en intégrant par parties pour montrer l'hérédité) que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (ix)^k \hat{f}^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \left(s \mapsto (-is)^n f(s)\right)^{(n)}(t) dt.$$
Or $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R} \mapsto \left(s \mapsto (-is)^n f(s)\right)^{(n)} \in \mathbb{R}$ est intégrable, donc par inégalité triangulaire $x \in \mathbb{R} \mapsto (ix)^k \hat{f}^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$ est bornée. Cela est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Ainsi $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est bien définie et par le théorème **??** elle est injective. Montrons qu'elle est surjective.
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ donc, par la formule d'inversion de Fourier **??**, on a
$$f = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}})(f) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f(-\cdot))\right)$$
avec $f(-\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Finalement, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est bijective.

2. La preuve de ce deuxième point repose sur l'inversion de l'ordre d'intégration dans une intégrale double. Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $h : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-ixy} f(x) g(y) \in \mathbb{R}$. On cherche à appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction h. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|h(x,y)| = |f(x)|\,|g(y)|$. Or f est intégrable donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto |f(x)|\,|g(y)| \in \mathbb{R}_+$ est intégrable. De plus g est intégrable donc $y \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|g(y)|\ dx \in \mathbb{R}$ est intégrable.
Ainsi, par le théorème de Fubuni-Tonelli, les fonctions h, $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\ dy \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(x,y) dx \in \mathbb{R}$ sont intégrables et $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\ dx\ dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x,y) dy dx$, i.e.
$$\int_{\mathbb{R}} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g.$$

3. Soient f et $g := \tilde{\mathcal{F}}\left(\bar{f}\right)$. Par le premier point, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et par le deuxième point

$$\int_{\mathbb{R}} f(\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}})(\bar{f}) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)\tilde{\mathcal{F}}(\bar{f}).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{\mathcal{F}}(\bar{f})(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\bar{f}(t)\ dt = \overline{\mathcal{F}(f)}(x)$. Donc, par la formule d'inversion de Fourier, $\int_{\mathbb{R}} 2\pi f\bar{f} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\bar{\hat{f}}$, i.e.

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\left|\left|\hat{f}\right|\right|_2^2.$$

□

Définition 4.20. La transformation de Fourier-Plancherel est

$$\mathcal{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f} \end{array} \right. .$$

Développement 4.21 *(Théorème de Fourier-Plancherel).* Il existe un unique prolongement continu de $\mathcal{P}$ à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Celui-ci est une isométrie bijective.

Preuve Par linéarité de la transformée de Fourier, $\mathcal{P}$ est linéaire. Or, par le lemme 4.19, pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $||\mathcal{P}(f)||_2 = ||f||_2$. Donc $\mathcal{P}$ est uniformément continue. Or par le théorème de Riesz-Fischer 4.7 l'espace L^2 est complet. De plus, l'ensemble de Schwartz $\mathcal{S}$ est dense dans L^2. Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues, il existe un unique prolongement continu de $\mathcal{P}$ à L^2. Notons encore $\mathcal{P}$ ce prolongement $\mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2$. Montrons que $\mathcal{P}$ est une isométrie bijective.

Soient $f, g \in \mathrm{L}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $(f_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ (resp. $(g_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$) qui converge vers f (resp. g) dans L^2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\lambda f_n + \mu g_n) = \lambda\mathcal{P}(f_n) + \mu\mathcal{P}(g_n)$ et $||\mathcal{P}(f_n)||_2 = ||f_n||_2$. Donc, par continuité de $\mathcal{P}$ et passage à la limite dans les deux égalités précédentes, $\mathcal{P}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{P}(f) + \mu\mathcal{P}(g)$ et $||\mathcal{P}(f)||_2 = ||f||_2$. Ainsi $\mathcal{P}$ est une isométrie linéaire.

Montrons que $\mathcal{P}$ est bijective. Il s'agit d'une isométrie, donc elle est injective. Montrons que son image est une partie fermée et dense de L^2.

Soit $(g_n)_n \in \mathcal{P}(\mathrm{L}^2)^{\mathbb{N}}$ convergente dans L^2. Notons $g \in \mathrm{L}^2$ sa limite. Il existe $(f_n)_n \in (\mathrm{L}^2)^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \mathcal{P}(f_n)$. La suite $(g_n)_n = (\mathcal{P}(f_n))_n$ est de Cauchy et, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $||\mathcal{P}(f_p) - \mathcal{P}(f_q)||_2 = ||f_p - f_q||_2$, donc $(f_n)_n$ est de Cauchy. Or L^2 est complet donc $(f_n)_n$ est convergente : notons f sa limite. Par continuité de $\mathcal{P}$, $g = \mathcal{P}(f) \in \mathcal{P}(\mathrm{L}^2)$. Ainsi $\mathcal{P}(\mathrm{L}^2)$ est fermée.

Montrons à présent qu'elle est dense. Soit $g \in \mathcal{S}$. Par le lemme 4.19, il existe $f \in \mathcal{S}$ telle que $g = \mathcal{P}(f) \in \mathcal{P}(\mathrm{L}^2)$. Donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathrm{L}^2)$. Or l'espace de Schwartz est dense dans L^2, donc il en est de même pour $\mathcal{P}(\mathrm{L}^2)$.

Ainsi $\mathcal{P}(\mathrm{L}^2) = \mathrm{L}^2$, i.e. $\mathcal{P}$ est surjective. Finalement, $\mathcal{P}$ est bijective, ce qui conclut. □

◇ Remarques.
- Pour prouver ce théorème, on peut aussi choisir de travailler sur l'espace dense $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ (au lieu de l'espace de Schwartz).
- Malgré ce prolongement, pour une fonction $f \in \mathrm{L}^2$ quelconque il est généralement erroné d'écrire $\mathcal{P}(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}f(t) \in \mathbb{R}$.

5 Bibliographie.

[BGL13] Alain Bouvier, Michel George et François Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques*. puf, 2013.

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*. 2e éd. H&K, 2005.

[BP12] Marc Briane et Gilles Pagès. *Analyse : Théorie de l'intégration*. 6e éd. Vuibert, 2012.

[Cha19] Xavier Charvet. *L'essentiel du programme de l'agrégation de mathématiques*. Ellipses, 2019.

[IP19] Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques*. Ellipses, 2019.

[QZ20] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. 5e éd. Dunod, 2020.