Rudiments de représentations des groupes finis

Groupe de lecture d'algèbre

ENS Rennes

Antoine Médoc & Téofil Adamski

Mardi 10 novembre 2020

Introduction

- **Intérêt :** le théorie des groupes est compliquée, alors que l'algèbre linéaire est simple.
- **But de l'exposé :**
  - Ce que c'est.

Introduction

- **Intérêt :** le théorie des groupes est compliquée, alors que l'algèbre linéaire est simple.

- **But de l'exposé :**
  - Ce que c'est.
  - Lemme de Schur et application à la décomposition en facteurs irréductibles (existence et unicité) : simplifie l'étude des représentations.

Introduction

- **Intérêt :** le théorie des groupes est compliquée, alors que l'algèbre linéaire est simple.

- **But de l'exposé :**
  - Ce que c'est.
  - Lemme de Schur et application à la décomposition en facteurs irréductibles (existence et unicité) : simplifie l'étude des représentations.
  - Exemple : recherche des représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ (non abélien) et des groupes abéliens (comme $\mathfrak{S}_1$ ou $\mathfrak{S}_2$).

Introduction

- **Intérêt :** le théorie des groupes est compliquée, alors que l'algèbre linéaire est simple.
- **But de l'exposé :**
  - Ce que c'est.
  - Lemme de Schur et application à la décomposition en facteurs irréductibles (existence et unicité) : simplifie l'étude des représentations.
  - Exemple : recherche des représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ (non abélien) et des groupes abéliens (comme $\mathfrak{S}_1$ ou $\mathfrak{S}_2$).
- **Référence :**
  William Fulton & Joe Harris, *Representation Theory, A First Course*, Lecture 1. Springer-Verlag (1991).

Plan

Partie 1

Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

Définition

Définition – représentation linéaire d'un groupe fini

Une *représentation linéaire* d'un groupe fini G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension fini et d'un morphisme de groupes $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$. On dit alors que l'espace vectoriel V est un G-*module*.

Définition

Définition – représentation linéaire d'un groupe fini

Une *représentation linéaire* d'un groupe fini G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension fini et d'un morphisme de groupes $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$. On dit alors que l'espace vectoriel V est un G-*module*.

Notation

Quand la représentation (V, ρ) est sous-entendue, on note $g \cdot v := \rho(g)(v)$ pour tous $g \in G$ et $v \in V$.

Exemples

- Soit G un groupe fini. Alors l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni du morphisme de groupes

$$\rho \colon \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{\times}, \\ g \longmapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \end{array} \right.$$

est une représentation de G, appelée *représentation triviale*.

Exemples

- Soit G un groupe fini. Alors l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni du morphisme de groupes
$$\rho : \left| \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times, \\ g & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \end{array} \right.$$
est une représentation de G, appelée *représentation triviale*.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $f^n = \mathrm{Id}_V$. Alors l'espace vectoriel V muni du morphisme de groupes
$$\rho : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V), \\ \overline{k} & \longmapsto & f^k \end{array} \right.$$
est une représentation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Construction de représentations

Soient (V, ρ) et (W, ρ') deux représentations de G.

- L'espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ est une représentation de G par le morphisme

$$\rho : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes_{\mathbb{C}} W), \\ g \longmapsto \rho(g) \otimes_{\mathbb{C}} \rho'(g). \end{array} \right.$$

  De même pour $V \oplus W$, $\bigwedge^n V$ et $\mathrm{Sym}^n V$.

Construction de représentations

Soient (V, ρ) et (W, ρ') deux représentations de G.

- L'espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ est une représentation de G par le morphisme
$$\rho : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes_{\mathbb{C}} W), \\ g \longmapsto \rho(g) \otimes_{\mathbb{C}} \rho'(g). \end{array} \right.$$
De même pour $V \oplus W$, $\bigwedge^n V$ et $\mathrm{Sym}^n V$.

- Le dual algébrique $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ est une représentation de G par le morphisme
$$\rho^* : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{GL}(V^*), \\ g \longmapsto {}^{\mathrm{t}}\rho(g^{-1}). \end{array} \right.$$
Idée : Pour tous $g \in G$, $v \in V$ et $v^* \in V^*$, on veut avoir
$$\langle \rho^*(g)(v^*), \rho(g)(v) \rangle = \langle v^*, v \rangle.$$

Construction de représentations (suites)

- Les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ et $V^* \otimes_{\mathbb{C}} W$ sont isomorphes : l'app.

$$\left| \begin{array}{rcl} V^* \times W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), \\ (f, w) & \longmapsto & [v \longmapsto f(v)w]. \end{array} \right.$$

est bilinéaire et, par propriété universelle, on peut considérer l'isomorphisme

$$\left| \begin{array}{rcl} V^* \otimes_{\mathbb{C}} W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), \\ f \otimes_{\mathbb{C}} w & \longmapsto & [v \longmapsto f(v)w]. \end{array} \right.$$

- Les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ et $V^* \otimes_{\mathbb{C}} W$ sont isomorphes : l'app.

$$\left| \begin{array}{rcl} V^* \times W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), \\ (f, w) & \longmapsto & [v \longmapsto f(v)w]. \end{array} \right.$$

  est bilinéaire et, par propriété universelle, on peut considérer l'isomorphisme

$$\left| \begin{array}{rcl} V^* \otimes_{\mathbb{C}} W & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W), \\ f \otimes_{\mathbb{C}} w & \longmapsto & [v \longmapsto f(v)w]. \end{array} \right.$$

  Elle est injective ($f = 0$ ou $w = 0 \Rightarrow f \otimes_{\mathbb{C}} w = 0$) et

$$\begin{aligned} \dim(V^* \otimes_{\mathbb{C}} W) &= \dim V^* \times \dim W \\ &= \dim V \times \dim W \\ &= \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W). \end{aligned}$$

- **Utile** : induit une structure de G-module sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$.

Morphisme de représentations

Définition – morphisme de représentations

Soit G un groupe fini. Un *morphisme de représentations* (ou de G-modules) entre deux représentations (V, ρ) et (W, ρ') de G est une application $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

commute pour tout élément $g \in G$. On qualifiera cette application de G-*linéaire*.

Morphisme de représentations

Notation

On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications G-linéaires $V \longrightarrow W$.

Pour toute applications G-linéaires $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, on définit

$$\operatorname{Ker} \varphi \subset V \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \varphi \subset W.$$

Notation

On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications G-linéaires $V \longrightarrow W$.

Pour toute applications G-linéaires $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, on définit

$$\operatorname{Ker}\varphi \subset V \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\varphi \subset W.$$

Ce sont des G-modules en utilisant la commutativité dans le diagramme de la définition des applications G-linéaire.

Sous-représentations et irréductibilité

Définition – sous-représentation

Une *sous-représentation* d'une représentation (V, ρ) de G est un sous-espace vectoriel $W \subset V$ qui est stable par toutes les applications $\rho(g)$ avec $g \in G$, *i. e.* vérifiant

$$\forall g \in G, \quad g \cdot V \subset V.$$

Définition – sous-représentation

Une *sous-représentation* d'une représentation (V, ρ) de G est un sous-espace vectoriel $W \subset V$ qui est stable par toutes les applications $\rho(g)$ avec $g \in G$, *i. e.* vérifiant

$$\forall g \in G, \quad g \cdot V \subset V.$$

Dans ce cas, l'espace W est une représentation de G par le morphisme

$$\rho^W : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{GL}(W), \\ g \longmapsto \rho(g)|_W. \end{array} \right.$$

Définition – sous-représentation

Une *sous-représentation* d'une représentation (V, ρ) de G est un sous-espace vectoriel $W \subset V$ qui est stable par toutes les applications $\rho(g)$ avec $g \in G$, *i. e.* vérifiant

$$\forall g \in G, \quad g \cdot V \subset V.$$

Dans ce cas, l'espace W est une représentation de G par le morphisme

$$\rho^W : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{GL}(W), \\ g \longmapsto \rho(g)|_W. \end{array} \right.$$

Définition – irréductibilité

Une représentation (V, ρ) de G est *irréductible* si toute sous-représentation est égale à $\{0\}$ ou V.

Partie 2

Le lemme de Schur

Sous-représentation supplémentaire

Proposition

Soient V une représentation de G et $W \subset V$ une sous-représentation. Alors il existe $W' \subset V$ une sous-représentation telle que

$$V = W \oplus W'.$$

Sous-représentation supplémentaire

Proposition

Soient V une représentation de G et $W \subset V$ une sous-représentation. Alors il existe $W' \subset V$ une sous-représentation telle que

$$V = W \oplus W'.$$

Idée de la preuve

Utilisation d'un projecteur bien choisi.

Proposition

Soient V une représentation de G et $W \subset V$ une sous-représentation. Alors il existe $W' \subset V$ une sous-représentation telle que

$$V = W \oplus W'.$$

Idée de la preuve

Utilisation d'un projecteur bien choisi.

Corollaire

Toute représentation est une somme directe de représentations irréductibles.

Sous-représentation supplémentaire

Proposition

Soient V une représentation de G et $W \subset V$ une sous-représentation. Alors il existe $W' \subset V$ une sous-représentation telle que

$$V = W \oplus W'.$$

Idée de la preuve

Utilisation d'un projecteur bien choisi.

Corollaire

Toute représentation est une somme directe de représentations irréductibles.

Preuve

Par récurrence initialisée à $\dim V = 1$, la proposition donne l'hérédité.

Preuve de la proposition

- Il existe $W_0 \subset V$ un supplémentaire de W. On note $p\colon V \longrightarrow W$ la projection sur W parallèlement à W_0. On considère alors l'application

$$p_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \colon V \longrightarrow V.$$

Preuve de la proposition

- Il existe $W_0 \subset V$ un supplémentaire de W. On note $p\colon V \longrightarrow W$ la projection sur W parallèlement à W_0. On considère alors l'application

$$p_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \colon V \longrightarrow V.$$

- Celle-ci est G-linéaire et c'est une projection sur W. On a alors

$$V = \operatorname{Im} p_G \oplus \operatorname{Ker} p_G \quad \text{avec} \quad \operatorname{Im} p_G = W.$$

Preuve de la proposition

- Il existe $W_0 \subset V$ un supplémentaire de W. On note $p\colon V \longrightarrow W$ la projection sur W parallèlement à W_0. On considère alors l'application

$$p_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \colon V \longrightarrow V.$$

- Celle-ci est G-linéaire et c'est une projection sur W. On a alors

$$V = \operatorname{Im} p_G \oplus \operatorname{Ker} p_G \quad \text{avec} \quad \operatorname{Im} p_G = W.$$

- Il suffit de poser $W' := \operatorname{Ker} p_G$.

Lemme de Schur

Lemme de Schur

Soient V et W deux représentations irréductibles de G et $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$.

- Le morphisme φ est un isomorphisme ou le morphisme trivial ;
- Si $V = W$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\varphi = \lambda \, \mathrm{Id}_V \, .$$

i. e. $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_V\}$.

Preuve du lemme de Schur

- **Première affirmation.** Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}\varphi \subset V$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset W$ sont des sous-représentations de V et W qui sont irréductibles, donc

$$\operatorname{Im}\varphi \in \big\{\{0\}, W\big\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}\varphi \in \big\{\{0\}, V\big\},$$

donc

$$(\operatorname{Ker}\varphi, \operatorname{Im}\varphi) = (\{0\}, W) \quad \text{ou} \quad (\operatorname{Ker}\varphi, \operatorname{Im}\varphi) = (V, \{0\}),$$

donc le morphisme φ est un isomorphisme ou le morphisme trivial.

Preuve du lemme de Schur

- **Première affirmation.** Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}\varphi \subset V$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset W$ sont des sous-représentations de V et W qui sont irréductibles, donc
$$\operatorname{Im}\varphi \in \big\{\{0\}, W\big\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}\varphi \in \big\{\{0\}, V\big\},$$
donc
$$(\operatorname{Ker}\varphi, \operatorname{Im}\varphi) = (\{0\}, W) \quad \text{ou} \quad (\operatorname{Ker}\varphi, \operatorname{Im}\varphi) = (V, \{0\}),$$
donc le morphisme φ est un isomorphisme ou le morphisme trivial.

- **Deuxième affirmation.** Supposons $V = W$. Ce sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, donc l'application $\mathbb{C}$-linéaire φ admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire
$$\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V) \neq \{0\}.$$
Donc $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V = 0$.

Proposition

Soit V une représentation non nulle de G.

- Alors il existe des sous-représentations **irréductibles** $V_1, \dots, V_k \subset V$ non nulles et deux à deux **distinctes** et des entiers $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ tels que
$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}.$$
où les représentations V_i ne sont pas deux à deux isomorphes.
- Soit $V = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$ une autre telle décomposition de V. Alors $k = \ell$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ telle que
$$V_i \simeq_G W_{\sigma(i)} \quad \text{pour tout } i \in [\![1, k]\!].$$

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».
- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».
- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.
  2. Alors il existe une injection G-linéaire $\varphi \colon X \longrightarrow V$.

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».
- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.
  2. Alors il existe une injection G-linéaire $\varphi \colon X \longrightarrow V$.
  3. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $p_i \colon V \longrightarrow V_i$ la projection sur V_i.

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».

- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.
  2. Alors il existe une injection G-linéaire $\varphi \colon X \longrightarrow V$.
  3. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $p_i \colon V \longrightarrow V_i$ la projection sur V_i.
  4. Il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que la composée $p_i \circ \varphi$ ne soit pas nulle (par l'absurde).

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».
- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.
  2. Alors il existe une injection G-linéaire $\varphi \colon X \longrightarrow V$.
  3. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $p_i \colon V \longrightarrow V_i$ la projection sur V_i.
  4. Il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que la composée $p_i \circ \varphi$ ne soit pas nulle (par l'absurde).
  5. Or $p_i \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_G(X, V_i)$, donc Schur assure qu'elle est bijective, *i. e.* $X \simeq_G V_i$.

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».
- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.
  2. Alors il existe une injection G-linéaire $\varphi \colon X \longrightarrow V$.
  3. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $p_i \colon V \longrightarrow V_i$ la projection sur V_i.
  4. Il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que la composée $p_i \circ \varphi$ ne soit pas nulle (par l'absurde).
  5. Or $p_i \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_G(X, V_i)$, donc Schur assure qu'elle est bijective, *i. e.* $X \simeq_G V_i$.
  6. De même, il existe $j \in [\![1, \ell]\!]$ tel que $X \simeq_G W_j$.

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».
- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.
  2. Alors il existe une injection G-linéaire $\varphi \colon X \longrightarrow V$.
  3. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $p_i \colon V \longrightarrow V_i$ la projection sur V_i.
  4. Il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que la composée $p_i \circ \varphi$ ne soit pas nulle (par l'absurde).
  5. Or $p_i \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_G(X, V_i)$, donc Schur assure qu'elle est bijective, *i. e.* $X \simeq_G V_i$.
  6. De même, il existe $j \in [\![1, \ell]\!]$ tel que $X \simeq_G W_j$.
  7. On en déduit alors $V_i \simeq_G W_j$.

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».
- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.
  2. Alors il existe une injection G-linéaire $\varphi \colon X \longrightarrow V$.
  3. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $p_i \colon V \longrightarrow V_i$ la projection sur V_i.
  4. Il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que la composée $p_i \circ \varphi$ ne soit pas nulle (par l'absurde).
  5. Or $p_i \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_G(X, V_i)$, donc Schur assure qu'elle est bijective, *i. e.* $X \simeq_G V_i$.
  6. De même, il existe $j \in [\![1, \ell]\!]$ tel que $X \simeq_G W_j$.
  7. On en déduit alors $V_i \simeq_G W_j$.
  8. Sommes directes + réc. $\Longrightarrow k = \ell$ et il existe une telle permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.

Preuve de la proposition

- **Existence.** Par le corollaire précédent, en « regroupant les termes isomorphes de la somme ».

- **Unicité.** On suppose $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus v_\ell}$.
  1. Soit $X \neq \{0\}$ une représentation irréductible telle que $X \simeq_G V' \subset V$.
  2. Alors il existe une injection G-linéaire $\varphi \colon X \longrightarrow V$.
  3. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note $p_i \colon V \longrightarrow V_i$ la projection sur V_i.
  4. Il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que la composée $p_i \circ \varphi$ ne soit pas nulle (par l'absurde).
  5. Or $p_i \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_G(X, V_i)$, donc Schur assure qu'elle est bijective, *i. e.* $X \simeq_G V_i$.
  6. De même, il existe $j \in [\![1, \ell]\!]$ tel que $X \simeq_G W_j$.
  7. On en déduit alors $V_i \simeq_G W_j$.
  8. Sommes directes + réc. $\Longrightarrow k = \ell$ et il existe une telle permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.
  9. De plus, on obtient $a_i = b_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Compléments

- Possible de montrer qu'un groupe fini admet un nombre fini de représentations irréductibles à isomorphisme près.

  Intéressant de les trouver (décomposition).

- Trouver une méthode pour décomposer une représentation et calculer les a_i ?

- Décrire une décomposition donnée par des opérations classiques d'algèbre linéaire ($*$, $\oplus$, $\otimes$, $\bigwedge^k$, Sym^k, $\ldots$) appliquées à des représentations déjà décomposées ?

$\longrightarrow$ Pas notre sujet.

Partie 3

Exemple du groupe $\mathfrak{S}_3$

Représentation de groupes abéliens finis

- Soit V une représentation de G. Alors pour tout $g \in G$, on a

$$\forall h \in G, \ \forall v \in V, \quad g \cdot (h \cdot v) = (gh) \cdot v = (hg) \cdot v = h \cdot (g \cdot v)$$

ce qui montre que le morphisme $\rho(g)$ est G-linéaire.

- Soit V une représentation de G. Alors pour tout $g \in G$, on a

$$\forall h \in G,\ \forall v \in V, \quad g \cdot (h \cdot v) = (gh) \cdot v = (hg) \cdot v = h \cdot (g \cdot v)$$

ce qui montre que le morphisme $\rho(g)$ est G-linéaire.

- Supposons que V est irréductible. Pour $g \in G$, le morphisme $\rho(g) \colon V \longrightarrow V$ est une homothétie par le lemme de Schur, *i. e.*

$$\exists \lambda_g \in \mathbb{C},\ \forall v \in V, \quad g \cdot v = \lambda_g v.$$

donc tout sous-espace vectoriel $W \subset V$ est stable par $\rho(g)$, *i. e.* est une sous-représentation. Or V est irréductible, donc $W = V$ ou $W = \{0\}$. D'où

$$\dim V \leqslant 1.$$

Réprésentation de groupes abéliens finis

- *Le cas abélien est « simple » :* les représentations irréductibles (V, ρ) avec $\dim V > 0$ sont les morphismes de groupes

$$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times.$$

- *Le cas abélien est « simple » :* les représentations irréductibles (V, ρ) avec $\dim V > 0$ sont les morphismes de groupes
$$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times.$$
- Les groupes $\mathfrak{S}_1 \simeq \{0\}$ et $\mathfrak{S}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont abéliens.
- On considère $\mathfrak{S}_3$, le plus petit groupe non abélien.

Cas général. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a la représentation triviale U_{tri} (dim 1)

$$\rho_{\mathrm{tri}} : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \\ g & \longmapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} & \longmapsto 1 \end{array} \right.$$

Cas général. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a la représentation triviale U_{tri} (dim 1)

$$\rho_{\mathrm{tri}} : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \\ g & \longmapsto \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} & \longmapsto 1 \end{array} \right.$$

et la *représentation alternative* U_{alt} (dim 1)

$$\rho_{\mathrm{alt}} : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ g & \longmapsto & [v \longmapsto \varepsilon(g).v] \end{array} \right.$$

Elles sont **irréductibles**.

Une autre représentation sur le groupe $\mathfrak{S}_3$

- On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Soit la représentation donnée par

  $$g \cdot e_i = e_{g(i)},$$

  i. e. pour $g \in \mathfrak{S}_3$ et $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$,

  $$\begin{aligned} g \cdot (z_1, z_2, z_3) &= g \cdot (z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3) \\ &= z_1 e_{g(1)} + z_2 e_{g(2)} + z_3 e_{g(3)} \\ &= (z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)}). \end{aligned}$$

Une autre représentation sur le groupe $\mathfrak{S}_3$

- On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Soit la représentation donnée par

$$g \cdot e_i = e_{g(i)},$$

i. e. pour $g \in \mathfrak{S}_3$ et $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$,

$$\begin{aligned} g \cdot (z_1, z_2, z_3) &= g \cdot (z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3) \\ &= z_1 e_{g(1)} + z_2 e_{g(2)} + z_3 e_{g(3)} \\ &= (z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)}). \end{aligned}$$

- Elle n'est pas irréductible car la droite $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{(1,1,1)\}$ est invariante (remarque : isomorphe à U_{tri}).

Une autre représentation du groupe $\mathfrak{S}_3$ (suite)

Un supplémentaire

$$V := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

est une représentation irréductible pour cette action, appelée *représentation standard* de $\mathfrak{S}_3$.

Une autre représentation du groupe $\mathfrak{S}_3$ (suite)

Un supplémentaire

$$V := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

est une représentation irréductible pour cette action, appelée *représentation standard* de $\mathfrak{S}_3$.

Il est clairement stable. Soit $D \subset V$ une droite. Avec $d = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in V \setminus \{0\}$, on a

$$D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{d\} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2.$$

On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow d = (0, 0, 0)$. Donc deux cas :

Une autre représentation du groupe $\mathfrak{S}_3$ (suite)

Un supplémentaire

$$V := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

est une représentation irréductible pour cette action, appelée *représentation standard* de $\mathfrak{S}_3$.

Il est clairement stable. Soit $D \subset V$ une droite. Avec $d = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in V \setminus \{0\}$, on a

$$D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{d\} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2.$$

On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow d = (0, 0, 0)$. Donc deux cas :

- $\lambda_1 \neq 0$. Deux sous-cas :
  - si $\lambda_2 = \lambda_1$, alors $\lambda_3 = -2\lambda_1 \neq \lambda_1$, donc pas stable par $g = (1\ 3)$.

Une autre représentation du groupe $\mathfrak{S}_3$ (suite)

Un supplémentaire

$$V := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

est une représentation irréductible pour cette action, appelée *représentation standard* de $\mathfrak{S}_3$.

Il est clairement stable. Soit $D \subset V$ une droite. Avec $d = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in V \setminus \{0\}$, on a

$$D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{d\} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2.$$

On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow d = (0, 0, 0)$. Donc deux cas :

- $\lambda_1 \neq 0$. Deux sous-cas :
  - si $\lambda_2 = \lambda_1$, alors $\lambda_3 = -2\lambda_1 \neq \lambda_1$, donc pas stable par $g = (1\ 3)$.
  - si $\lambda_2 \neq \lambda_1$, alors pas stable par $g = (1\ 2)$.

Un supplémentaire

$$V := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

est une représentation irréductible pour cette action, appelée *représentation standard* de $\mathfrak{S}_3$.

Il est clairement stable. Soit $D \subset V$ une droite. Avec $d = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in V \setminus \{0\}$, on a

$$D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{d\} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2.$$

On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow d = (0, 0, 0)$. Donc deux cas :

- $\lambda_1 \neq 0$. Deux sous-cas :
  - si $\lambda_2 = \lambda_1$, alors $\lambda_3 = -2\lambda_1 \neq \lambda_1$, donc pas stable par $g = (1\ 3)$.
  - si $\lambda_2 \neq \lambda_1$, alors pas stable par $g = (1\ 2)$.
- $\lambda_2 \neq 0$: idem.

Forme des représentations de $\mathfrak{S}_3$

Proposition

Une représentation non nulle W de $\mathfrak{S}_3$ est de la forme

$$W = U_{\mathrm{tri}}^{\oplus a} \oplus U_{\mathrm{alt}}^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}, \quad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

→ Façon classique de le montrer : théorie des caractères. Pas fait ici (trop générale).

Forme des représentations de $\mathfrak{S}_3$

Proposition

Une représentation non nulle W de $\mathfrak{S}_3$ est de la forme

$$W = U_{\text{tri}}^{\oplus a} \oplus U_{\text{alt}}^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}, \quad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

→ Façon classique de le montrer : théorie des caractères. Pas fait ici (trop générale).

Remarque

Par les résultats précédents, cela revient à montrer que les seules représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ sont U_{triv}, U_{alt} et V (à isomorphisme près).

Preuve de la proposition

- Soit W représentation de $\mathfrak{S}_3$. Comme $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{S}_3$, on peut voir W comme une représentation de $\mathfrak{A}_3$.
- Intéressant : comme $\mathfrak{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est **abélien** (cas bien plus simple déjà traité),

Preuve de la proposition

- Soit W représentation de $\mathfrak{S}_3$. Comme $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{S}_3$, on peut voir W comme une représentation de $\mathfrak{A}_3$.
- Intéressant : comme $\mathfrak{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est **abélien** (cas bien plus simple déjà traité), on a une décomposition
$$W = \bigoplus_{n=1}^{N} V_n^{\oplus a_n}$$
avec $V_n \subset W$ une représentation de $\mathfrak{A}_3$ de $\dim 1$, notée $V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{v_n\}$.

Preuve de la proposition

- Soit W représentation de $\mathfrak{S}_3$. Comme $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{S}_3$, on peut voir W comme une représentation de $\mathfrak{A}_3$.
- Intéressant : comme $\mathfrak{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est **abélien** (cas bien plus simple déjà traité), on a une décomposition

$$W = \bigoplus_{n=1}^{N} V_n^{\oplus a_n}$$

avec $V_n \subset W$ une représentation de $\mathfrak{A}_3$ de $\dim 1$, notée $V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{v_n\}$.
- Pour la suite, avec des sous-représentations de $\mathfrak{A}_3$, on va essayer de se ramener à des représentations simples de $\mathfrak{S}_3$, quitte à les « agrandir », et montrer que ce sont celles qui nous intéressent.

Preuve de la proposition

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ un 3-cycle. Alors $\mathfrak{A}_3 = \langle \sigma \rangle$. Comme $\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ et V_n stable par σ, on a
$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^\times, \quad \sigma|_{V_n} = \lambda \, \mathrm{Id}_{V_n} .$$

Preuve de la proposition

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ un 3-cycle. Alors $\mathfrak{A}_3 = \langle \sigma \rangle$. Comme $\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ et V_n stable par σ, on a
$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^\times, \quad \sigma|_{V_n} = \lambda \,\mathrm{Id}_{V_n}\,.$$
Or $\sigma^3|_{V_n} = \mathrm{Id}_{V_n}$, donc $\lambda^3 = 1$, donc $\lambda \in \{1, \omega, \omega^2\}$ avec $\omega := e^{2i\pi/3}$.

- Il existe $\tau \in \mathfrak{S}_3$ une transposition telle que $\tau\sigma\tau = \sigma^2$. De plus, Lagrange donne
$$\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle.$$

Preuve de la proposition

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ un 3-cycle. Alors $\mathfrak{A}_3 = \langle \sigma \rangle$. Comme $\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ et V_n stable par σ, on a
$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^\times, \quad \sigma|_{V_n} = \lambda \operatorname{Id}_{V_n}.$$
Or $\sigma^3|_{V_n} = \operatorname{Id}_{V_n}$, donc $\lambda^3 = 1$, donc $\lambda \in \{1, \omega, \omega^2\}$ avec $\omega := e^{2i\pi/3}$.

- Il existe $\tau \in \mathfrak{S}_3$ une transposition telle que $\tau\sigma\tau = \sigma^2$. De plus, Lagrange donne
$$\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle.$$

- À ce stade, on a deux permutations qui engendrent $\mathfrak{S}_3$, on va étudier leurs effets sur V_n pour un entier $n \in [\![1, N]\!]$ donné : on essaiera alors de se ramener à une des actions simples que l'on connaît.

Preuve de la proposition

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ un 3-cycle. Alors $\mathfrak{A}_3 = \langle \sigma \rangle$. Comme $\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ et V_n stable par σ, on a
$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^\times, \quad \sigma|_{V_n} = \lambda \,\mathrm{Id}_{V_n}\,.$$
Or $\sigma^3|_{V_n} = \mathrm{Id}_{V_n}$, donc $\lambda^3 = 1$, donc $\lambda \in \{1, \omega, \omega^2\}$ avec $\omega := e^{2i\pi/3}$.

- Il existe $\tau \in \mathfrak{S}_3$ une transposition telle que $\tau\sigma\tau = \sigma^2$. De plus, Lagrange donne
$$\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle.$$

- À ce stade, on a deux permutations qui engendrent $\mathfrak{S}_3$, on va étudier leurs effets sur V_n pour un entier $n \in [\![1, N]\!]$ donné : on essaiera alors de se ramener à une des actions simples que l'on connaît.

- Soit $v = v_n$. Il existe $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $\sigma \cdot v = \omega^k v$.

Ce qu'on va faire

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \begin{array}{c} W \text{ rep. de } \mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle \\ \text{sur } \mathfrak{A}_3 \to W = \bigoplus V_n^{\oplus a_n} \\ \sigma \cdot v = \omega^k v \end{array} \arrow[dll, "\omega^k \neq 1"'] \arrow[dr, "\omega^k = 1"] & & \\
\boldsymbol{V_n \subset V} & & & {} \arrow[dl, "{(v, \tau \cdot v) \text{ libre}}"'] \arrow[dr, "{(v, \tau \cdot v) \text{ liée}}"] & \\
 & & {} \arrow[dl, "\tau \cdot v = +v"'] \arrow[dr, "\tau \cdot v = -v"] & & \boldsymbol{V_n \subset U}_{\text{tri}} \oplus \boldsymbol{U}_{\text{alt}} \\
 & \boldsymbol{V_n \simeq U}_{\text{tri}} & & \boldsymbol{V_n \simeq U}_{\text{alt}} &
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 1 – Récapitulatif des cas

Preuve de la proposition – Cas $k \neq 0$ ($\omega^k \neq 1$)

- Alors
$$\sigma \cdot (\tau \cdot v) = \tau\sigma^2 \cdot v = \tau \cdot \omega^{2k} v = \omega^{2k} \times \tau \cdot v.$$
$\rightarrow$ Le vecteur $\tau \cdot v$ est un vecteur propre de σ associé à la valeur propre ω^{2k}.
- Les vecteurs v et $\tau \cdot v$ engendrent un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V' de dimension 2 (car $\omega^k \neq \omega^{2k}$) qui est une sous-représentation car
$$\sigma \cdot v = \omega^k v \in V', \tag{1}$$
$$\sigma \cdot (\tau \cdot v) = \omega^{2k} \times \tau \cdot v \in V', \tag{2}$$
$$\tau \cdot v = \tau \cdot v \in V', \tag{3}$$
$$\tau \cdot (\tau \cdot v) = v \in V'. \tag{4}$$

Preuve de la proposition – Cas $k \neq 0$ ($\omega^k \neq 1$)

- Alors
$$\sigma \cdot (\tau \cdot v) = \tau\sigma^2 \cdot v = \tau \cdot \omega^{2k} v = \omega^{2k} \times \tau \cdot v.$$
$\rightarrow$ Le vecteur $\tau \cdot v$ est un vecteur propre de σ associé à la valeur propre ω^{2k}.
- Les vecteurs v et $\tau \cdot v$ engendrent un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V' de dimension 2 (car $\omega^k \neq \omega^{2k}$) qui est une sous-représentation car
$$\sigma \cdot v = \omega^k v \in V', \tag{1}$$
$$\sigma \cdot (\tau \cdot v) = \omega^{2k} \times \tau \cdot v \in V', \tag{2}$$
$$\tau \cdot v = \tau \cdot v \in V', \tag{3}$$
$$\tau \cdot (\tau \cdot v) = v \in V'. \tag{4}$$
$\rightarrow$ Ces relations sont importantes, mettons-les en parallèles avec des relations sur V pour montrer que ces deux représentations sont en fait les mêmes.

Preuve de la proposition – Cas $k \neq 0$ ($\omega^k \neq 1$)

- Retrouvons des relations semblables avec V. Avec $\sigma := (1\ 2\ 3)$ et $\tau := (1\ 2)$, les vecteurs $\alpha := (\omega, 1, \omega^2) \in V$ et $\beta := (1, \omega, \omega^2) \in V$ forment une base de V avec

$$\sigma \cdot \alpha = \omega\alpha \qquad (a),$$
$$\sigma \cdot \beta = \omega^2\beta \qquad (b),$$
$$\tau \cdot \alpha = \beta \qquad (c),$$
$$\tau \cdot \beta = \alpha \qquad (d).$$

Preuve de la proposition – Cas $k \neq 0$ ($\omega^k \neq 1$)

$$\sigma \cdot v = \omega^k v \in V' \qquad (1) \qquad\qquad \sigma \cdot \alpha = \omega\alpha \in V, \qquad (a)$$

$$\sigma \cdot (\tau \cdot v) = \omega^{2k} \times \tau \cdot v \in V', \qquad (2) \qquad\qquad \sigma \cdot \beta = \omega^2\beta \in V, \qquad (b)$$

$$\tau \cdot v = \tau \cdot v \in V', \qquad (3) \qquad\qquad \tau \cdot \alpha = \beta \in V, \qquad (c)$$

$$\tau \cdot (\tau \cdot v) = v \in V', \qquad (4) \qquad\qquad \tau \cdot \beta = \alpha \in V. \qquad (d)$$

Preuve de la proposition – Cas $k \neq 0$ ($\omega^k \neq 1$)

$$
\begin{aligned}
\sigma \cdot v &= \omega^k v \in V' && (1) & \sigma \cdot \alpha &= \omega\alpha \in V, && (a)\\
\sigma \cdot (\tau \cdot v) &= \omega^{2k} \times \tau \cdot v \in V', && (2) & \sigma \cdot \beta &= \omega^2\beta \in V, && (b)\\
\tau \cdot v &= \tau \cdot v \in V', && (3) & \tau \cdot \alpha &= \beta \in V, && (c)\\
\tau \cdot (\tau \cdot v) &= v \in V', && (4) & \tau \cdot \beta &= \alpha \in V. && (d)
\end{aligned}
$$

- Pour $k = 1$, on définit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ par

$$\varphi(\alpha) = v \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = \tau \cdot v$$

et on a les correspondances $(1) \leftrightarrow (a)$, $(2) \leftrightarrow (b)$, $(3) \leftrightarrow (c)$, $(4) \leftrightarrow (d)$.

Preuve de la proposition – Cas $k \neq 0$ ($\omega^k \neq 1$)

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot v &= \omega^k v \in V' && (1) & \sigma \cdot \alpha &= \omega\alpha \in V, && (a)\\
\sigma \cdot (\tau \cdot v) &= \omega^{2k} \times \tau \cdot v \in V', && (2) & \sigma \cdot \beta &= \omega^2\beta \in V, && (b)\\
\tau \cdot v &= \tau \cdot v \in V', && (3) & \tau \cdot \alpha &= \beta \in V, && (c)\\
\tau \cdot (\tau \cdot v) &= v \in V', && (4) & \tau \cdot \beta &= \alpha \in V. && (d)
\end{aligned}$$

- Pour $k = 1$, on définit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ par

$$\varphi(\alpha) = v \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = \tau \cdot v$$

et on a les correspondances $(1) \leftrightarrow (a)$, $(2) \leftrightarrow (b)$, $(3) \leftrightarrow (c)$, $(4) \leftrightarrow (d)$.

- Pour $k = 2$, on définit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ par

$$\varphi(\alpha) = \tau \cdot v \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = v$$

et on a les correspondances $(1) \leftrightarrow (a)$, $(2) \leftrightarrow (b)$, $(3) \leftrightarrow (d)$, $(4) \leftrightarrow (c)$.

Preuve de la proposition – Cas $k \neq 0$ ($\omega^k \neq 1$)

$$\sigma \cdot v = \omega^k v \in V' \qquad (1) \qquad \sigma \cdot \alpha = \omega\alpha \in V, \qquad (a)$$
$$\sigma \cdot (\tau \cdot v) = \omega^{2k} \times \tau \cdot v \in V', \qquad (2) \qquad \sigma \cdot \beta = \omega^2\beta \in V, \qquad (b)$$
$$\tau \cdot v = \tau \cdot v \in V', \qquad (3) \qquad \tau \cdot \alpha = \beta \in V, \qquad (c)$$
$$\tau \cdot (\tau \cdot v) = v \in V', \qquad (4) \qquad \tau \cdot \beta = \alpha \in V. \qquad (d)$$

- Pour $k = 1$, on définit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ par
$$\varphi(\alpha) = v \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = \tau \cdot v$$
et on a les correspondances $(1) \leftrightarrow (a)$, $(2) \leftrightarrow (b)$, $(3) \leftrightarrow (c)$, $(4) \leftrightarrow (d)$.

- Pour $k = 2$, on définit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V')$ par
$$\varphi(\alpha) = \tau \cdot v \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = v$$
et on a les correspondances $(1) \leftrightarrow (a)$, $(2) \leftrightarrow (b)$, $(3) \leftrightarrow (d)$, $(4) \leftrightarrow (c)$.

- Dans les deux cas, on a un isomorphisme G-linéaire, donc $V' \simeq_G V$.

Preuve de la proposition – Cas $k = 0$ ($\omega^k = 1$)

- À ce stade, on a traité le cas $k = 1$ ou 2 et montré qu'on retrouve un facteur irréductible V (connu).
  $\rightarrow$ Traitons le dernier cas : $k = 0$.

Preuve de la proposition – Cas $k = 0$ ($\omega^k = 1$)

- À ce stade, on a traité le cas $k = 1$ ou 2 et montré qu'on retrouve un facteur irréductible V (connu).
  $\rightarrow$ Traitons le dernier cas : $k = 0$.

- **1[er] sous-cas :** v et $\tau \cdot v$ sont linéairement dépendants. Alors il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\tau \cdot v = \mu v$. Or

$$v = \tau^2 \cdot v = \tau \cdot (\tau \cdot v) = \tau \cdot \mu v = \mu\tau \cdot v = \mu^2 v.$$

  D'où $\mu = \pm 1$.

Preuve de la proposition – Cas $k = 0$ ($\omega^k = 1$)

- À ce stade, on a traité le cas $k = 1$ ou 2 et montré qu'on retrouve un facteur irréductible V (connu).
  $\rightarrow$ Traitons le dernier cas : $k = 0$.

- **1er sous-cas :** v et $\tau \cdot v$ sont linéairement dépendants. Alors il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\tau \cdot v = \mu v$. Or

  $$v = \tau^2 \cdot v = \tau \cdot (\tau \cdot v) = \tau \cdot \mu v = \mu \tau \cdot v = \mu^2 v.$$

  D'où $\mu = \pm 1$.

  - **Sous-sous-cas 1a :** $\mu = 1$. Soit $g \in \mathfrak{S}_3$. Alors g est produit de σ et de τ (attention : ne commutent pas).
    Or $\sigma \cdot v = v$ et $\tau \cdot v = v$ donc $g \cdot v = v$ donc $\forall \tilde{v} \in V_n, g \cdot \tilde{v} = \tilde{v}$.
    Finalement, on a $V_n \simeq_G U_{\text{tri}}$ (facteur connu, gagné).

Preuve de la proposition – Cas $k = 0$ ($\omega^k = 1$)

- **1er sous-cas (suite) :** il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\tau \cdot v = \mu v$.
  - **Sous-sous-cas 1b :** $\mu = -1$. Soit $g \in \mathfrak{S}_3$: g est produit de σ et de τ.
    La signature ε est un morphisme de groupes avec $\varepsilon(\sigma) = 1$ et $\varepsilon(\tau) = -1$, donc

$$\varepsilon(g) = (-1)^{\text{nombre de } \tau \text{ dans le produit}}.$$

Preuve de la proposition – Cas $k = 0$ ($\omega^k = 1$)

- **1[er] sous-cas (suite) :** il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\tau \cdot v = \mu v$.
  - **Sous-sous-cas 1b :** $\mu = -1$. Soit $g \in \mathfrak{S}_3$: g est produit de σ et de τ.
    La signature ε est un morphisme de groupes avec $\varepsilon(\sigma) = 1$ et $\varepsilon(\tau) = -1$, donc

    $$\varepsilon(g) = (-1)^{\text{nombre de } \tau \text{ dans le produit}}.$$

    Or $\sigma \cdot v = v$ et $\tau \cdot v = -v$ donc

    $$g \cdot v = (-1)^{\text{nombre de } \tau \text{ dans le produit}} v = \varepsilon(g) v.$$

    $\rightarrow$ Même conclusion avec (v) base de V_n, donc $V_n \simeq_G U_{\text{alt}}$.

Preuve de la proposition – Cas $k = 0$ ($\omega^k = 1$)

- 2^{nd} **sous-cas :** v et $\tau \cdot v$ sont linéairement indépendants. Alors

$$v + \tau \cdot v \neq 0, \quad v - \tau \cdot v \neq 0.$$

  - Soit $V'_+ := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{v + \tau \cdot v\}$. Comme

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (v + \tau \cdot v) &= \sigma \cdot v + \sigma\tau \cdot v = v + \tau \cdot v, \\ \tau \cdot (v + \tau \cdot v) &= \tau \cdot v + \tau^2 \cdot v = \tau \cdot v + v \end{aligned}$$

  Donc $V'_+ \simeq_G U_{\text{tri}}$.

Preuve de la proposition – Cas $k = 0$ ($\omega^k = 1$)

- **2nd sous-cas :** v et $\tau \cdot v$ sont linéairement indépendants. Alors

$$v + \tau \cdot v \neq 0, \quad v - \tau \cdot v \neq 0.$$

  - Soit $V'_+ := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{v + \tau \cdot v\}$. Comme

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (v + \tau \cdot v) &= \sigma \cdot v + \sigma\tau \cdot v = v + \tau \cdot v, \\ \tau \cdot (v + \tau \cdot v) &= \tau \cdot v + \tau^2 \cdot v = \tau \cdot v + v \end{aligned}$$

    Donc $V'_+ \simeq_G U_{\mathrm{tri}}$.

  - Soit $V'_- := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{v - \tau \cdot v\}$. De même, on a $V'_- \simeq_G U_{\mathrm{alt}}$.

Conclusion de la preuve

- Supposons que W est représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$. On a montré qu'il existe une sous-représentation irréductible $U \subset W$ de $\mathfrak{S}_3$ qui soit isomorphe à U_{tri}, U_{alt} ou V. Comme W est irréductible, on a $W = U$.

Conclusion de la preuve

- Supposons que W est représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$. On a montré qu'il existe une sous-représentation irréductible $U \subset W$ de $\mathfrak{S}_3$ qui soit isomorphe à U_{tri}, U_{alt} ou V. Comme W est irréductible, on a $W = U$.

- Finalement, tout représentation W de $\mathfrak{S}_3$ s'écrit sous la forme

$$W = U_{\text{tri}}^{\oplus a} \oplus U_{\text{alt}}^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}, \quad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Conclusion de la preuve

- Supposons que W est représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$. On a montré qu'il existe une sous-représentation irréductible $U \subset W$ de $\mathfrak{S}_3$ qui soit isomorphe à U_{tri}, U_{alt} ou V. Comme W est irréductible, on a $W = U$.

- Finalement, tout représentation W de $\mathfrak{S}_3$ s'écrit sous la forme
$$W = U_{\text{tri}}^{\oplus a} \oplus U_{\text{alt}}^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}, \quad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

- On a distingué certains cas pour obtenir une conclusion bonus :
  - c est la multiplicité la valeurs propre ω de σ ;
  - $a + c$ est la multiplicité de la valeur propre 1 de τ ;
  - $b + c$ est la multiplicité de la valeur propre -1 de τ ;

Conclusion de la preuve

- Supposons que W est représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$. On a montré qu'il existe une sous-représentation irréductible $U \subset W$ de $\mathfrak{S}_3$ qui soit isomorphe à U_{tri}, U_{alt} ou V. Comme W est irréductible, on a $W = U$.

- Finalement, tout représentation W de $\mathfrak{S}_3$ s'écrit sous la forme
$$W = U_{\text{tri}}^{\oplus a} \oplus U_{\text{alt}}^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}, \quad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

- On a distingué certains cas pour obtenir une conclusion bonus :
  - c est la multiplicité la valeurs propre ω de σ ;
  - $a + c$ est la multiplicité de la valeur propre 1 de τ ;
  - $b + c$ est la multiplicité de la valeur propre -1 de τ ;

- On a donc toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ à isomorphisme près, on a la proposition voulue en appliquant la propriété de décomposition en facteurs irréductibles.

Partie 4

Conclusion de l'exposé

Conclusion de l'exposé

- Les représentations linéaires des groupes finis facilitent leur compréhension. La décomposition en facteurs irréductibles simplifie encore cette forme.

Conclusion de l'exposé

- Les représentations linéaires des groupes finis facilitent leur compréhension. La décomposition en facteurs irréductibles simplifie encore cette forme.

- On a vu les facteurs irréductibles des groupes abéliens (lemme de Schur) et ceux de $\mathfrak{S}_3$ sans utiliser les caractères.

Conclusion de l'exposé

- Les représentations linéaires des groupes finis facilitent leur compréhension. La décomposition en facteurs irréductibles simplifie encore cette forme.
- On a vu les facteurs irréductibles des groupes abéliens (lemme de Schur) et ceux de $\mathfrak{S}_3$ sans utiliser les caractères.
- *Cas $\mathfrak{S}_n$ trivial, laissé en exercice au lecteur.*